当代数学大师

——沃尔夫数学奖得主及其建树与见解

（第3版）

李心灿 编著



北京航空航天大学出版社

责任编辑：方莉莉

装帧设计：黄建军

ISBN 7-81012-868-X





ISBN 7—81012—868—X
定价：25.00元

当代数学大师

——沃尔夫数学奖得主

及其建树与见解

（第3版）

李心灿　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书以简练的文字，介绍了当代极负盛名的43位沃尔夫数学奖得主的简历、主要成就、治学态度和方法以及他们对数学研究、数学教育等方面的卓越见解，展现了当代数学发展的众多信息和特点。本书在附录中还简要地介绍了菲尔兹奖得主的主要成就及历次国际数学家大会等。

本书适合于数学教师、数学研究工作者、研究生、大学生及数学爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

当代数学大师/李心灿编著. —北京:北京航空航天大学出版社,1999.12

ISBN 7—81012—868—X

Ⅰ.当… Ⅱ.李… Ⅲ.①科学家—传记—世界②数学史—世界 Ⅳ.K816.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第05534号

当代数学大师

(第3版)

李心灿 编著

责任编辑 方莉莉

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(100083) 发行部电话:010—82317024 传真:010—82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:850×1 168 1/32 印张:11 字数:296千字

2005年10月第3版 2005年10月第3次印刷 印数:4 501～7 500册

ISBN 7-81012-868-X 定价:25.00元

序

姜伯驹*

当今的数学科学，在科技革命的大环境中经过几十年的大发展，恐怕用参天大树来比喻已经不够，而更像一片枝蔓交错的密林了。她结出的丰富多彩的果实，滋养着每一门科学、每一门技术，悄悄地改变着我们的生活。然而公众对于数学科学的了解，却未能有相应的进步。即使是常年劳作于其枝叶之间的数学工作者，也不易识其全貌。通俗书刊往往着重阐述其内容与方法，或展现其智巧的魅力，而疏于探究其历史的发展与领袖人物的贡献，忽略其社会背景与对经济、文化的深刻影响。对比一下中学教科书对物理学家与对数学家的介绍，可以明显看到数学界在传播工作方面的差距。

李心灿先生编著的《当代数学大师》，从一个与众不同的角度来介绍当代的数学。沃尔夫奖是国际上享有诺贝尔奖那样崇高声誉的两大数学奖之一，评奖标准不是单项成就而是终身贡献。介绍沃尔夫奖得主，可以横跨数学中不同学科的界线，纵观数学主流几十年的前进历程，可以学习这些大师的品格和成功道路。而我最爱读的部分，是大师们自己的治学经验之谈，包括他们对数学

---

* 姜伯驹教授是中国科学院院士、第三世界科学院院士、北京大学数学科学学院第一任院长。

界许多热门话题的见解，有血有肉地反映出数学与当代社会的息息相关。

本书这些材料是来之不易的，因为沃尔夫奖不像菲尔兹奖那样每次有人系统介绍获奖人的成就，只能依靠长期的积累，往往还要翻阅原著。作为一名读者，我非常感谢本书的作者为收集、研究、整理这些宝贵材料付出的艰辛劳动，并向同行们，向爱好数学的年轻朋友们推荐这本书。

第1版前言

数学是什么？它有何重要性？古往今来不少杰出人物留下了精辟的言论。试看：

“数学是科学的皇后。”

——C. F. 高斯(Gauss)

“数学是打开科学大门的钥匙。”

——R. 培根(Bacon)

“数学是人类智慧王冠上最灿烂的明珠。”

——N. A. 考特(Court)

“数学代表人类抽象思维方面的最高成就和胜利。”

——K. L. 米斯拉(Misra)

“数学是观察理解世界的一种方式。”

——V. 辛格(Singh)

“数学除了锻炼敏锐的理解力，发现真理以外，它还有训练全面考查科学系统的头脑的开发功能。”

——H. G. 格拉斯曼(Grassmann)

“数学语言提供了表达精确思想的主要手段。”

——R. D. 卡迈克尔(Carmichael)

“经验科学中多数深刻的定理都是借助数学概念陈述的。”

——C. G. 亨普尔(Hempel)

“一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步。”

——K. 马克思(Marx)

“一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量。”

——A. N. 拉奥(Rao)

“要辩证而又唯物地了解自然，就必须熟悉数学。”

——F. 恩格斯(Engels)

“要对自然的奥秘作更深入的探索，就必须同时发展数学。”

——J. W. A. 杨(Young)

“数学既和几乎所有的人类活动有关，又对每一个真心感兴趣的人有益。”

——R. C. 巴克(Buck)

“有什么科学比数学这门科学更雄伟，更卓越，对人们更有用，更令人崇尚及更富有论证性呢？”

——B. 富兰克利姆(Franklim)

……

的确，数学在自然科学乃至一切科学中的重要地位是不容置疑的。因此，即使一个非数学专业的学生，不论哪个专业，从小学开始到大学毕业为止，学习数学的时间至少都有 12 年至 14 年之久。

然而，令人难解的是，在那举世瞩目的、一年一度的诺贝尔(Nobel)奖中，只设有物理、化学、生物或医学、文学、和平事业五个类别(1968 年又增设了经济学奖)，竟然没有数学这个科学的皇后之份额，这无疑使得数学这个重要学科失去了一个在世界上评价其重大成就和表彰其卓越人物的机会。为此，人们对诺贝尔的遗嘱有着各种议论、猜测，并感到十分遗憾！

不过，遗嘱可以永存，遗憾却不必持久。正是在这种背景下，世界上先后设立了两个国际性的数学大奖：一个是国际数学联合会(International Mathematical Union)主持评定的，在每四年召开

一次的国际数学家大会(International Congress of Mathematicians)上颁发的菲尔兹(Fields)奖*;另一个是由沃尔夫基金会(The Wolf Foundation)设立的,一年一度的沃尔夫(Wolf)数学奖。尽管这两个数学大奖的奖金不及诺贝尔奖,但其权威性、国际性以及所享有的荣誉却都不亚于斯。这对于献身数学之前就早把金钱置于次要地位的数学家来说已足够了。这两项大奖因此也被世人誉为“数学中的诺贝尔奖”。

由于菲尔兹奖只授予年轻数学家,因此它有一定局限性:第一,它不足以代表一位数学家的全部成就;第二,它以 40 岁以下的数学家为评选对象,年纪较大的数学家没有获奖可能。

正好,1976 年 1 月 1 日,R. 沃尔夫(Ricardo Wolf)及其家族捐献一千万美元成立了沃尔夫基金会,其宗旨主要是为了促进全世界科学、艺术的发展。R. 沃尔夫 1887 年生于德国,其父是德国汉诺威城的一位五金商人,也是该城犹太社会的名流。R. 沃尔夫曾在德国研究化学,并获得博士学位。第一次世界大战前移居古巴。他用了将近 20 年的时间,经过大量试验,历尽艰辛,成功地发明了一种从熔炼废渣中回收铁的方法,从而成为百万富翁。1961—1973 年他曾任古巴驻以色列大使,以后定居以色列。他是沃尔夫基金会的倡导者和主要捐献人。R. 沃尔夫于 1981 年逝世。基金会的理事会主席由以色列政府官员担任。评奖委员会由世界著名科学家组成。沃尔夫基金会设有数学、物理、化学、医学、农业五个奖(1981 年又增设艺术奖)。1978 年开始颁发,颁发给那些“为人类利益以及各民族间的友好关系做出贡献的”杰出科学家和艺术家,而“不考虑他们的国籍、种族、肤色、宗教信仰、性别和所持的政治观点。”通常是每年颁发一次,每个奖项的奖金为 10 万美元,可以由几人分得。1978—1990 年已有 24 位数学家获得沃尔夫数学奖。由于沃尔夫数学奖具有终身成就奖的性质,所以这 24

---

* 关于菲尔兹奖的有关情况,请参见本书的附录一。

位数学家都是蜚声数坛、闻名遐迩的当代数学大师，他们的成就在相当程度上代表了当代数学的水平和进展。

著名数学家 N. H. 阿贝尔(Abel)曾说："在我看来，一个人如果要在数学上有所进步，就必须向大师学习。"为了使我国的广大数学爱好者了解这些当代数学大师的简历、风采、主要学术成就，以及他们的治学态度、治学方法、数学观和他们对数学研究、数学教育方面的一些卓越见解，在有关同志的建议下，笔者编写了此书。

本书主要是根据书后"参考文献"中所列的书籍、文章中有关文字、资料、照片编著而成。在此，特向本书中所介绍的数学大师们及"参考文献"中的作者、译者，特别是《数学译林》的有关译者(对有的译文的词句，笔者作了局部修改)致谢，并向读者致意。限于本人水平，本书若有不当或错误之处，恳请读者批评指正。

中国科学院院士、第三世界科学院院士姜伯驹教授审阅了本书的大部分初稿，提出了不少宝贵的建议，并欣然作序。中国科学院院士、中国数学会名誉理事长柯召教授为本书题了词。柯召教授、张同教授、唐志远教授、蒋正新教授分别提供了 P. 爱尔特希(Erdös)、P. D. 拉克斯(Lax)、H. 烈伟(Lewy)、M. G. 克列因(Krein)的部分资料。李志尧教授提供了部分数学家的照片。本书在编写、出版过程中得到了航空航天工业部科学技术研究院、航空工业出版社李德英副总编辑的支持。中国科学院数学研究所李文林教授、北京工业大学沈永欢教授、北京航空航天大学蒋正新教授及柳重堪教授、西南交通大学高隆昌教授先后审阅了本书的初稿，并提出了修改意见。首都师范大学石生明教授、陈家鼐教授审阅一部分书稿。北京信息工程学院郭锡伯教授帮助我校对过一校的清样。在此一并表示衷心谢意。

李心灿

1993 年盛暑于北京航空航天大学

第 2 版前言

2000 年，既是世纪之交，又是千年之交。

我们都为自己能跨越这个大世纪而感到荣幸，因此目前各行各业都在认真总结过去，准备以一个崭新的姿态迎接新世纪的到来。数学界更不例外。早在 1990 年国际数学联合会(IMU)在日本神户举行的会议上，美国代表团就提议成立“跨世纪委员会”，以组织在 2000 年前后的数学活动。1992 年 5 月国际数学联合会在巴西里约热内卢举行的会议上，国际数学联合会主席 J. L. 利翁(Lions)以国际数学联合会的名义，宣布 2000 年为“世界数学年”，并提出了三项目标：(1)21 世纪的伟大挑战；(2)数学是发展的关键；(3)树立数学的形象。同时提出了许多建议，其中包括：在 2000 年前后在世界各地举行一些专题会议，展示数学各方面的发展和前景；在 2000 年组织一次大型会议，挑选杰出数学家就一些重要领域作系统报告；组织出版一套数学纪念专集，展望本世纪数学成果、下世纪数学的未来和要解决的数学问题；要以各种方式宣传数学对人类发展的重要意义和数学教育的重要性等等。这次会议还成立了负责此项工作的“跨世纪委员会”。这项活动和计划得到了联合国教科文组织及第三世界科学院等组织的支持。

笔者撰写的《当代数学大师——沃尔夫数学奖得主及其建树与见解》，自 1994 年出版以来，得到了数学界的热情肯定。特别是随着 2000 年“世界数学年”的来临，我不断接到数学界同仁们的来信，希望笔者能在该书第一版的基础上，将 1992—1998 年的 9 位沃尔夫数学奖得主的建树与见解及 1994 年度和 1998 年度的两届菲尔兹奖得主简介补入，并适当充实相关信息，作为鸟瞰 20 世纪数学的重大成果及展示 20 世纪一批杰出数学家风采的一个重要

窗口。为此，我对本书第一版进行了增补、修订，特把它奉献给2000 年——“世界数学年”。

我诚挚地感谢中国科学院院士、中国数学会名誉理事长柯召教授和美国国家科学院院士、中国科学院外籍院士陈省身教授，欣然挥毫为本书题词。

本书在撰写过程中得到了我校理学院科研基金的资助。

本书的出版，得到了航空工业出版社有关负责同志和北京航空航天大学出版社社长许传安编审热忱的支持。本书增补的内容承蒙西南交通大学高隆昌教授帮助润色，清华大学萧树铁教授、北京大学潘承彪教授、南开大学史树中教授、首都师范大学石生明教授、北方工业大学齐东旭教授、北京航空航天大学李津教授和杨应辰教授、中国科学院数学研究所袁向东教授、华东师范大学张奠宙教授、上海科学技术出版社《科学》杂志的田廷彦先生、在法国留学的黄少涓博士都热情地为我提供了有关资料或照片，责任编辑王海虹同志为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动，在此一并致谢。

限于本人水平，书中若有不当之处，恳请本书中介绍的数学大师们及数学界的同仁和读者指正。

李心灿

1999 年冬于北京航空航天大学

第 3 版前言

第三版在第二版的基础上，除了增加 1999—2005 年的 10 位沃尔夫数学奖得主：L. 洛瓦兹，E. M. 斯坦，R. 博特，J. P. 塞尔，V. I. 阿诺尔德，S. 谢拉赫，佐藤斡夫，J. 塔特，G. A. 马尔古利斯，S. P. 诺维科夫外，还对 J. 勒雷，A. 韦伊，H. 嘉当，A. N. 柯尔莫哥洛夫，L. V. 阿尔福斯，P. 爱尔特希，小平邦彦，S. 艾伦伯格，A. 赛尔伯格，J. W. 米尔诺，A. P. 考尔德伦，J. G. 汤普森，M. 格罗莫夫，J. L. 蒂茨，R. 朗兰兹，A. 怀尔斯，Y. 赛奈等人的资料作了补充、修改。另外，还增加了四个新的附录：奈望林纳奖及其得主简介，克拉福德奖及其得主简介，阿贝尔奖及其得主简介，新千年七个悬赏的数学问题简介。

第三版的修订，得到了北京师范大学严士健教授、北京理工大学叶其孝教授、北方工业大学邹建成教授、北京交通大学陈治中教授、上海交通大学胡毓达教授、北京联合大学陈冬教授的帮助，他们热情地提供了有关资料，在此一并致谢。

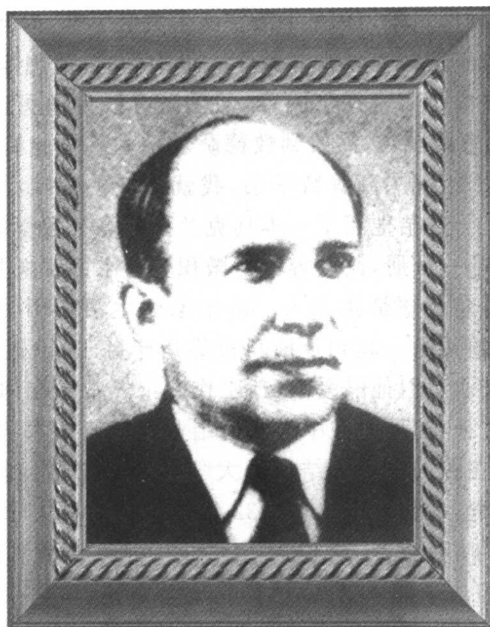
第三版得到了北京航空航天大学出版基金的资助。

李心灿

2005 年秋于北京航空航天大学

目 录

I. M. 盖尔范德
(Gelfand, Izrail Moiseevich)



“无论是 I. M. 盖尔范德的代表性著作，还是他关于当代数学问题的综合报告或展望文章，都是极为重要的，I. M. 盖尔范德所提出的数学问题曾多次开创新的数学领域……”[1]

——N. N. 博戈柳波夫(Bogoljubov，苏联科学院院士、数学家)等

“不要吝惜时间来思考基础理论问题，这点很重要。……在我们的时代，数学家应该成为自然哲学家。”[2]

——I. M. 盖尔范德

I. M. 盖尔范德是苏联数学家，1913 年 9 月 2 日生于乌克兰敖德萨州红奥克内市。

由于他对泛函分析、群表示论的工作以及对数学及其应用的多领域的开创性贡献，1978 年荣获沃尔夫数学奖，时年 65 岁。

I. M. 盖尔范德自幼喜欢数学。上中学时，他想像高等数学一定更有趣，但由于家庭经济困难，父母没有钱为他买这方面的书。15 岁那年他患阑尾炎，需要到敖德萨动手术。借此机会他向父母宣称："如果不给我买高等数学书，我就拒绝去医院动手术。"[2] 父母终于同意了，并给他买了一本乌克兰文的高等数学教程，但他们的钱仅能买第一分册，其内容包括微积分与平面解析几何。

I. M. 盖尔范德是犹太人。由于家庭生活贫困，1930 年中学还未毕业便随父亲一起到莫斯科投靠远亲务工，干过多种临时性工作，经常失业。但他酷爱学习，工作之余经常坐在列宁图书馆里如饥似渴地"补充"那些在中学及未结业的职业技术学校中没有学到的知识。在图书馆里他结识了大学生们，并开始到莫斯科大学旁听数学课程，参加讨论班。1932 年他被莫斯科大学录取为研究生，于 1935 年获副博士学位，其论文是《抽象函数和线性算子》。1938 年，他完成了博士论文，这是其成名之作，正是在这篇论文中他创立了交换赋范环论。1940 年获物理学数学科学博士学位。1943 年起任莫斯科大学教授，后兼任该校生物数学研究所所长。1953 年当选为苏联科学院通讯院士，1984 年当选为院士。1966—1970 年任莫斯科数学会主席，后被选为该学会荣誉会员。他还被选为英国皇家学会、瑞典皇家学会、爱尔兰皇家学会、法国科学院、美国国家科学院、美国科学与艺术研究院及其他多个外国科学院的会员或院士。他是牛津大学、巴黎大学、哈佛大学的荣誉博士。1989 年赴美国，在拉特格斯大学任教。1990 年起在国外组织盖尔范德讨论班。

I. M. 盖尔范德奠定了巴拿赫代数的理论基础。巴拿赫代数是泛函分析的一个分支，在分析学中遇到的许多重要的巴拿赫空

间在适当地规定乘法后就成为巴拿赫代数。巴拿赫代数在调和分析、算子理论、函数论、代数等许多领域中有广泛的应用。I. M. 盖尔范德找出了函数空间的代数结构,创造了(交换)赋范环论(即巴拿赫代数理论)。虽然有些数学家在他之前从事过赋范环的研究,但是 I. M. 盖尔范德将此前的一些孤立的结果联系了起来,并引进了新的内容。例如,他引进了极大理想环空间,给出了元素在其上的表示(盖尔范德表示)的概念。他还同合作者们研究了带有对合的(非交换)赋范环,创造了将这种环表示为希尔伯特空间中某一具有自然对合的线性算子环的形式。这一工作的自然延续是局部紧群的无限维表示理论。I. M. 盖尔范德用赋范环论简单、漂亮地证明了 N. 维纳(Wiener)的下述一条著名定理:若 $f(x)$ 恒不等于零,且其傅里叶级数绝对收敛,则 $1/f(x)$ 的傅里叶级数也绝对收敛。从而显示出交换巴拿赫代数理论的巨大威力,并迅速吸引了一大批数学家的关注,从此,巴拿赫代数理论的研究便蓬勃开展起来。I. M. 盖尔范德还得到了谱半径的优美公式。他与 M. A. 奈玛克(Namark)合作开创了 C^* 代数(一种特殊的、重要的巴拿赫代数)的研究。I. M. 盖尔范德还将经典分析、代数、泛函分析巧妙地结合在一起,得到了完美的理论系统。他和他的学派所发展的表示理论的结果及研究方法在粒子物理和量子场论中有着广泛的应用。表示理论还促进了他和他的学派在积分几何方面的一系列工作。他把积分几何看成是半单李群的表示理论中某些事实的解释。他不止一次地强调积分几何的基本问题之一是要走出齐性流形的几何范围,使得有关表示理论的相应结果成为更一般提法的特殊情形。

在 I. M. 盖尔范德的工作中占有重要地位的另一个内容是对广义函数的研究。广义函数是古典函数概念的推广,是泛函分析中有着广泛应用的一个重要分支。随着泛函分析的发展,L. 施瓦尔茨(Schwartz)用泛函分析观点为广义函数建立了一套严格的理论,而 I. M. 盖尔范德则对广义函数论作了重要发展。从此,广义

函数被广泛地应用于数学、物理、力学以及分析数学的其他各分支，例如微分方程、随机过程、流形理论等等，同时还被应用到群的表示理论，特别是有力地促进了近 40 年来偏微分方程的发展。I. M. 盖尔范德同他的学生合著的多卷本《广义函数论》是一部丰富多彩的巨著，在国际数学界享有很高的声誉。

I. M. 盖尔范德对椭圆型偏微分方程也很有建树。例如，他在 1960 年注意到闭微分流形上的椭圆型算子有一个分析指标，而流形本身是有拓扑指标的，这两个看来毫不相关的指标有没有什么关系呢？I. M. 盖尔范德猜想它们应该相等。他的这个大胆猜想很快被英国数学家 M. F. 阿蒂亚（Atiyah）和 I. M. 辛格（Singer）所证实。

I. M. 盖尔范德对辛结构的代数研究及有关的哈密顿算子理论和一套形式变分理论的研究，也是很值得称道的。他还讨论了光滑流形上所有光滑向量场构成的李代数的上同调。盖尔范德－富克斯上同调在微分几何学和拓扑学中有着重要应用。

I. M. 盖尔范德是当代最伟大的数学家之一。他对现代泛函分析理论的形成及其与数学物理、代数、拓扑、微分几何和分析等其他数学分支的密切联系有着重要的影响。他毕生的论著约 500 种，其内容涉及赋范环、表示理论、广义函数、自守函数、积分几何、无限维李代数的上同调、椭圆型微分方程、组合示性类、二重对数、判别式、超几何函数、谱分析、应用数学、计算数学等领域。20 世纪 50 年代开始，他更多地重视将抽象的数学理论与国民经济的实际问题结合起来。20 世纪 60 年代起从事运动人体学、细胞生物学、医学诊断的研究。例如，他给出了称为诊断博弈的专门方法，这一方法成功地应用于心脏学、胃肠学、神经学、肾脏学等一系列专题。

世界著名的斯普林格（Springer）出版社于 1987—1988 年陆续出版了 I. M. 盖尔范德的三卷文集。第一卷收录了 I. M. 盖尔范德在 1954 年、1962 年和 1970 年举行的国际数学家大会上的报

告和其他综述性论文，还有 V. W. 吉耶曼(Guillemin)、S. 斯腾伯格(Sternberg)、A. A. 柯里洛夫(Kirillov)特意为该文集写的对 I. M. 盖尔范德工作的评述。该文集列举了大量文献，包括 500 条左右的参考目录。

I. M. 盖尔范德有些著作已被译成中文，如《一次代数学》(商务印书馆，1953 年)，《广义函数》Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ(分别与 G. E. 希洛夫和 N. J. 维列金合著)(科学出版社，1984—1985 年陆续出版或再版)。

I. M. 盖尔范德是莫斯科泛函分析学派的领袖，1943 年在他的主持下创立了世界著名的泛函分析讨论班。50 多年来，参加讨论班的既有大学一年级学生，也有著名学者。这个讨论班已培养出了不少卓越的数学家。他的讨论班最重要的特点是：只有当他们完全明了所讨论课题的实质时，讨论才告结束。在讨论过程中，他总是指出一系列独特的、深刻的问题，使讨论班通过研究这些问题从各个方面去挖掘所讨论的课题的实质。这样，当讨论结束时，解决该课题的新的理论与方法便已形成，甚至课题的延伸的方向也能被清晰地展露出来，因而，不仅 I. M. 盖尔范德本人，而且参加讨论班的大部分人都能把握住要进一步讨论的内容。由于每次讨论班的结束都意味着苏联，乃至世界数学取得了新进展，因而可以说，I. M. 盖尔范德的讨论班出类拔萃，并极受数学界的推崇。I. M. 盖尔范德也因此形成了自己的学派。同他一起工作过的数学家有：G. E. 希洛夫(Shilov)、N. J. 维列金(Vilenkin)、M. 格雷耶夫(Grayev)、卡兹丹(Kazhdan)、S. N. 伯恩斯坦(Bernstein)、维斯基格(Viskik)等。我国著名数学家夏道行教授 20 世纪 50 年代留学苏联，曾师从 I. M. 盖尔范德研究泛函分析，并成为该学派一位很有贡献的人物。

I. M. 盖尔范德是苏联数学函授学校的奠基者及其科学委员会主席。1964 年在他倡导下创建的全苏数学函授学校是当时苏联第一所这种类型的学校。此后，以此为榜样，开办起了越来越多

的其他的函授学校。他还是《数学科学成就》杂志的编委会成员、《泛函分析及其应用》杂志的主编，以及国际一些重要杂志的编委。

由于 I. M. 盖尔范德的杰出贡献，他先后荣膺三枚列宁勋章、二枚劳动红旗勋章、二枚人民友谊奖章和“荣誉”勋章，也是一次列宁奖、两次国家奖的获得者。

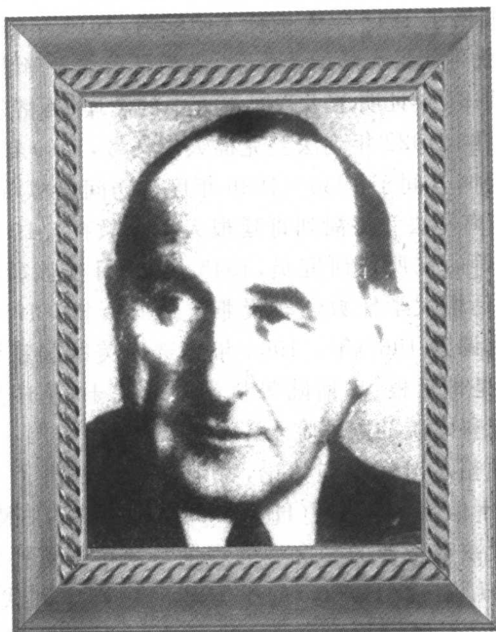
1990 年沃尔夫数学奖得主、著名数学家 I. 皮亚捷茨基-沙皮罗(Piatetski-Sapiro)称：I. M. 盖尔范德、A. N. 柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)、I. R. 沙法列维奇(Shafarevich)是苏联数学界的三大巨人。他认为：“I. M. 盖尔范德是最伟大的，I. M. 盖尔范德既具有 I. R. 沙法列维奇那样渊深的数学造诣，又具有 A. N. 柯尔莫哥洛夫那样广博的知识。此外，I. M. 盖尔范德还有一个特别的才能：他能够同时从事几个基本领域的研究，而并不感到增加了工作的困难。”[7] 他还说，I. M. 盖尔范德在与其合作者的共同工作中，“以在提出问题时是‘催化剂’，在遇到困难时是‘救火队’，在研究完成时又是一个细致的、毫不留情的批评家而闻名遐迩。”[7]

I. M. 盖尔范德曾先后于 1954 年、1962 年、1970 年三次被邀请在国际数学家大会上作全会报告，这充分说明了他在国际数坛的地位。

I. M. 盖尔范德在晚年自述他的数学生涯和获得成功的经验时说：“经受了分析的‘严格论证’后，就有可能感受到数学分析的美妙。”[2]“读完了(确切地说是仔细研究了)D. 希尔伯特(Hilbert)和 R. 柯朗(Courant)的出色著作《数学物理方法》，这使我懂得了阅读基础著作的必要性，不要吝惜时间来思考基础理论问题，这点很重要。属于这类著作的还有 C. H. H. 外尔(Weyl)关于经典群的表示。……在我们的时代，数学家应该成为自然哲学家。”[2]

关于讨论班，I. M. 盖尔范德说：“参加大学讨论班，这对我非常有益。与各种完全不同的数学家相遇，我能够将自己对数学的浪漫、过时(不是时髦)观点与数学的现代发展相比较。我曾经向许多卓越的数学家学习过……”[2]

C. L. 西格尔
(Siegel, Carl Ludwig)



"……C. L. 西格尔的思维代表着当代数学中最好的思维类型。无论在经典的还是现代的课题方面，他的工作都一直深深地影响着我们时代的数学文化。"[8]

——K. 查德里斯卡恩兰(Chandrasekharan，数学家，曾任国际数学联合会秘书长及主席)

"学术界的同事们忘我地工作在一起，不抱个人野心，不凭借所居高位而只是无拘无束地研究、讨论问题，该是多么可贵的幸事啊！"[9]

——C. L. 西格尔

C. L. 西格尔是德国数学家,1896 年 12 月 31 日生于柏林。

由于他对数论、多复变函数论、天体力学所做出的重要贡献,1978 年荣获沃尔夫数学奖,时年已近 82 岁。

C. L. 西格尔 1915 年入柏林大学学习,1919 年转到哥廷根大学,1920 年获哥廷根大学博士学位,随后任著名数学家 R. 柯朗的助手,并于 1921 年证明了丢番图逼近中的图埃-西格尔定理,从而开始崭露头角。1922 年到法兰克福大学任教,1930 年兼任哥廷根大学客座讲师,其间于 1935—1936 年度曾访问普林斯顿高等研究所。1938 年离开法兰克福到哥廷根大学任教授。1940 年到美国普林斯顿高等研究所任研究员,1945 年 10 月任该所教授。1951 年 5 月回哥廷根大学任数学教授兼数学所所长。1959 年提前退休,但一直讲课到 1967 年。1968 年当选为美国国家科学院国外院士。他还是哥廷根、奥斯陆等科学院的院士,是瑞典皇家科学院、丹麦皇家科学院的国外院士。

C. L. 西格尔对代数和数论,特别是数论做出了一系列突出的贡献。早年他与 H. 哈塞(Hasse)共同研究希尔伯特第 11 问题(关于任意代数数系数的二次型的理论),获得了重要结果。1922 年,他将 G. H. 哈代(Hardy)的平方和问题推广到代数域中去。1926 年,他在《方程 $y^2=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ 的整数解》一文中,解决了超椭圆曲线的有理点个数问题。1929 年,他在《丢番图逼近》一文中,将精致的存在性理论和莫德尔-韦伊定理以及阿贝尔簇理论的原始形式结合起来,解决了仿射曲线上整点个数是否有限的问题,即西格尔问题。文中还包含了在超越理论中很重要的西格尔引理。在不定方程的有理数解中有他 1929 年得出的,后来以他的姓氏命名的西格尔定理:"设 $f_i(X_1,\cdots,X_n)=0(1\leqslant i\leqslant m)$ 在 n 维仿射空间中确定了亏格大于 0 的代数曲线,则 $f_i(X_1,\cdots,X_n)=0(1\leqslant i\leqslant m)$ 的有理数解的个数为有限。"对于超越数论,1930 年他与 L. O. 库兹明(Kuzmin)同时证明:如果 α 是不等于 0 和 1 的代数数,β 是二次实代数数,则 α^β 是超越数,例如 $2^{\sqrt{2}}$ 即是超越数。这

一成果促进了希尔伯特第 7 问题的解决。在二次域越的数论中，他于 1935 年证明：$\forall \varepsilon>0, \exists c>0$，使得 $h(d)>c|d|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$，$c$ 不能有效算出，其中 $h(d)$ 是判别式为 d 的二次域 k 的类数，这个结果可以表示成 $\lim\limits_{|d|\to\infty}[(\lg h(d)/(\lg\sqrt{|d|})]=1$。特别是，使得 $h(d)=1$ 的虚二次域只有有限个。1936 年，他在《素数在算术级数中的分布》一文中，证明了佩奇-西格尔-瓦尔菲施定理。1936—1937 年，他连续发表了关于二次型的解析理论的三篇文章，为二次型的算术理论研究打下了坚实的基础。他将二次型的有关问题推广到不定二次型的情形和以有限次代数数域的元为系数的二次型情形。C. L. 西格尔还对非退化不定二次型定义了在整个平面上为亚纯的 ζ 函数，现称西格尔 ζ 函数。总之，C. L. 西格尔把 C. F. 高斯的二次型理论扩展到多变数情形，成就卓著。1945 年，他在《代数数域的华林问题的推广》中对有限次代数数域 K 中的广义华林问题取得了重要成果，成功地推广了法里分割，特别是对于相应的劣弧部分，C. L. 西格尔作了出色的工作。C. L. 西格尔对数的几何也很有建树。数的几何又称几何数论，它是应用几何方法研究某些数论问题的一个数论分支。C. L. 西格尔在数的几何中得到了一条重要的中值定理。1950 年，他与 C. H. H. 外尔等人合写了《数的几何》，其中对阿贝尔函数和阿贝尔簇理论作了深刻的研究。

值得指出的是，C. L. 西格尔在研究黎曼 ζ 函数理论时的一个发现，是将历史知识和数学研究结合的最了不起的例子。1930 年左右，C. L. 西格尔从事 G. F. B. 黎曼(Riemann)有关解析数论著作的考证和研究。在 G. F. B. 黎曼去世那年(1866 年)未尽的论文散页中，断断续续地记着一些公式，这些论文现藏于德国哥廷根州档案馆和哥廷根大学图书馆内。由于人们对 ζ 函数和 G. F. B. 黎曼关于其非显然零点均有等于 1/2 的实部的猜想有巨大兴趣，所以对 G. F. B. 黎曼可能已经得到但未发表过的关于 ζ 函数的信息特别好奇。在 C. L. 西格尔之前，有些人试图去理解 G. F. B.

黎曼的那些毫无联系的注记,但完成这项工作需要这样的人——他应既是极老练的、技巧纯熟的数学家,同时又是一个有耐心和具有奉献精神的历史学家。只有这种人才能去研究像 G. F. B. 黎曼这样一位人物留下的原始材料。C. L. 西格尔的努力使他获得了惊人的发现,即 G. F. B. 黎曼已经得到关于 ζ 函数的两个公式。在 G. F. B. 黎曼死后半个多世纪(即 1932 年),他的这两个公式终于问世了。历史证明它们中的每一个都对 ζ 函数理论的发展做出了重大贡献。要不是 C. L. 西格尔,这些公式至今还可能不为人所知。为了纪念 C. L. 西格尔的这项功绩,人们将这两个公式称为黎曼-西格尔公式。

C. L. 西格尔另一项成就是对自守函数所做出的贡献。自守函数是圆函数、双曲函数、椭圆函数以及初等分析中其他函数的推广。自守函数理论是由 J. H. 庞加莱(Poincaré)与 C. F. 克莱因(Klein)等人在 19 世纪 80 年代开创的。自守函数是在克莱因群变换下不变的函数,它把内容丰富的椭圆函数论包括进来,作为它的一个支系。自守函数论的中心问题之一是研究自守函数组成的域的代数结构。C. L. 西格尔在这方面取得了一系列的成就:在基本域为紧的情况下,他证明了任一自守函数都可以写成自守形式之商;任何 $n+1$ 个自守函数都是代数相关的;可以选择 $n+1$ 个自守函数 $f_0, f_1, \cdots, f_n$,使任何自守函数都能表成它们的有理函数。此外,C. L. 西格尔依据他对二次型的解析理论的出色研究,构造了大批具有重要意义的基本域(紧的和非紧的)的例子,这些例子都与代数群的算术子群密切相关。例如,C. L. 西格尔研究算术群 $SL(n,Z)$,并做出了它的基本域,称为西格尔域,而 $SL(n,Z)$称为西格尔模群。在自守函数中,以 C. L. 西格尔的姓氏命名的西格尔模函数也是很有名的。C. L. 西格尔的上述工作为离散子群及相应的模函数论的研究指明了方向。C. L. 西格尔的《多复变解析函数》(1948—1949 年出版)是一本系统地介绍多复变自守函数方面的名著,已被译成中文及其他多种文字出版。由于与

李群的无穷维表示、代数数论的内在联系，自守函数得到了大量的深入研究。时至今日，这一领域正处于近代数学的众多分支(诸如复分析、代数几何、代数群、代数数论、李群等)的交汇点，其重要性正与日俱增。

C.L. 西格尔对天体力学的研究也很有建树。天体力学是主要用力学方法研究太阳系内的行星、彗星、月球、卫星等天体运动的学科。更广泛地说，银河系内的恒星、双星的运动，天体的平衡形状，地球、月球等天体的自转运动等也是这门学问的研究对象。这门学科的基础是牛顿力学，必要时把广义相对论的效应等作为修正加以考虑。这样，根本问题就是解运动方程。一般地说，n 体问题的微分方程，当 $n>2$ 时是不能完全解出的。但是，在具体情况下，n 体问题可以对照着观测精度求近似解。特别是 $n=3$ 的情形在天体力学中很重要而且具有数学趣味，A.C. 克莱罗(Clairaut)、J.I.R. 达朗贝尔(D'Alembert)、L. 欧拉(Euler)、J.L. 拉格朗日(Lagrange)、J.H. 庞加莱等著名数学家都研究过三体问题。已知的三体问题的特解有拉格朗日的正三角形解。C.L. 西格尔进一步证明：三体问题的几何图形渐近地接近于拉格朗日特解的图形，而且碰撞方向是确定的，在一般情况下解析开拓是不可能的。C.L. 西格尔将他对天体力学的研究撰写成《天体力学教程》(1956 年)和《天体力学讲义》(1971 年，与 J.K. 莫泽(Moser)合著)，这两本论著已成为当今天体力学的经典著作。

C.L. 西格尔是一位博大精深的数学家，发表了许多论著，诸如《多复变解析函数》、《数的几何》、《天体力学课程》、《辛几何》、《不连续群》等。

世界著名的斯普林格(Springer)出版社 1966—1979 年陆续出版了 C.L. 西格尔的四卷文集。该文集的编者之一 K. 查德里斯卡恩兰在序言中写道："他的研究体现了数论、分析、代数和几何方法的结合，他在处理任何具体问题时都反映出对纯粹技巧以及对概念与结构的正确的直观力，这一切说明 C.L. 西格尔的思维

代表着当代数学中最好的思维类型，无论在经典的还是现代的课题方面，他的工作都一直深深地影响着我们时代的数学文化。”[8]

C. L. 西格尔是位非常勤奋的数学家。日本著名数学家、菲尔兹奖和沃尔夫奖获得者小平邦彦(Kodaira Kunihiko)讲过关于C. L. 西格尔在美国普林斯顿高等研究所的一个故事：有一次，C. L. 西格尔从早上 9 点起研究数学，全神贯注，等到从数学中醒过来已是夜里 12 点了，并感到肚子很饿。然后，他在午夜把一天的伙食并做一餐吃掉，吃后肚子很不舒服。

C. L. 西格尔讲课极为出色。他认为：“通过认真备课和言简意赅的表达，能够激发起原来对数学不太感兴趣的人们的兴趣。”[9]为了讲好一小时课，他往往要花六小时来认真备课。他在讲课时，从不带笔记，无论多么难的式子都记在他的脑子里，而且绝对没有错。他的讲课深入浅出，条理清晰，学生无不对他的讲课赞赏不已。研究所与大学不同，讲授的对象都是有独立工作能力的数学家。C. L. 西格尔每学期开的课都不尽相同，他先后主讲过函数论、阿贝尔簇、三体问题、数论等。他认为：“教授们应特别关心那些新的班级，他们这样做毕竟值得。因为通过亲自辅导新来的学生，教授们只需几堂课之后，就会从交来的作业中发现哪些学生更具有天赋，于是就可以密切注意他们，予以进一步的培养。”[9]他还认为：“讨论班所真正致力的还在于使参加讨论班的学生对老师的讲课能加深理解，并使教师在深入研究前人名著过程中获得美的享受。”[9]C. L. 西格尔认为，对学生的影响，教师的品德的力量比知识的力量更深刻。他曾说：“我收到一些三四十年前教过的学生的来信，他们说，同我们相处的那些日子引起多么美好的回忆，一切都好像还在眼前一样。如果这些印象在三四十年之后依旧能记忆犹新的话，那么这主要是由于教师们的品德在学生心里产生了经久不衰的影响，因为这时候老师所教过的书，学生已经早该忘光了。”[9]

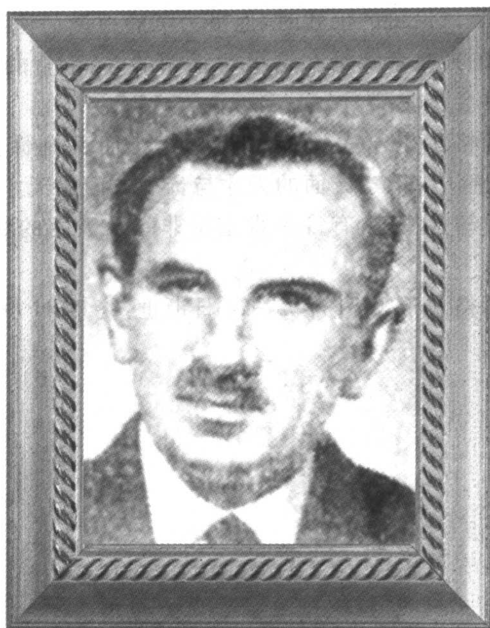
C. L. 西格尔体格魁伟，性格豪放，但精力专一，终生未娶。

他把一生的精力都奉献给了科学事业。他认为:“学术界的同事们忘我地工作在一起,不抱个人野心,不凭借所居高位而只是无拘无束地研究、讨论问题,该是多么可贵的幸事呵!”[9]当谈到希特勒对法兰克福数学讨论班的摧残时,他极为沉痛地说:“让我们希望,那些误入歧途的狂热者曾经在这里对正派的人、正直的人的所作所为,将永远不会重演。”[9]

C.L. 西格尔乐于去研究一些既经典而又难懂的数学。他说:“人们普遍认为数学方面的天才与音乐方面的天才有着密切的联系,然而我却很清楚,有许多肯定是非音乐天才的数学家,我就是其中之一。”[9]

C.L. 西格尔于 1981 年 4 月 4 日逝世,终年 84 岁。

J. 勒雷
(Leray,Jean)



“过去许多伟大的数学家在极为艰难的环境中创造出了他们的杰作;在当代,我们有J. 勒雷的例子,他在集中营里革新了现代拓扑学。”[12]

——M. F. 阿蒂亚(英国数学家,菲尔兹奖得主)

“从认识论的观点来看,人们应该给数学科学以无上的地位。”[11]

“正是数学的广泛用途,使它实质上成为基础的科学。”[11]

——J. 勒雷

J. 勒雷是法国数学家，1906 年 11 月 7 日生于法国南特。

由于他对发展及应用拓扑方法研究微分方程的先驱性工作，1979 年荣获沃尔夫数学奖，时年 73 岁。

J. 勒雷 1926—1929 年就读于巴黎高等师范学校，1933 年获巴黎大学科学博士学位。1936—1947 年先后任南锡大学及巴黎大学教授，其间曾于 1940 年作为一名军官参加第二次世界大战，被德军俘虏并被关进奥地利的集中营，1945 年获释。1947—1978 年任法兰西学院教授。1953 年当选为法国科学院院士，1966 年被选为苏联科学院外籍院士，他还被选为美国国家科学院和另外一些国家的科学院的国外院士。

J. 勒雷最著名的工作是在偏微分方程领域，包括对流体流动中的湍流第一个数学描述，以及首先把泛函空间的思想用到求解微分方程中。而且他在代数拓扑和复变工作中也有巨大的影响，他是把层论和谱序列引入拓扑学的数学家之一，是建立多复变中一般剩余理论的先驱。

J. 勒雷在获得博士学位的第二年，即 1934 年，就开始研究微分算子理论，在“拟导数”的名称下系统地引进了广义微分算子，还给出了局部可积函数正则化的过程。1957 年他又把 F. 约翰(John)的方法推广到强双曲型算子的情形，进行了大量研究。J. 勒雷对不动点理论做出了重要贡献。不动点理论是关于方程的一种一般理论。数学里常常要解各式各样的方程，例如代数方程、函数方程、微分方程等等。但是它们通常能改写成 $f(x)=x$ 的形式，这里 x 是某个适当的空间 X 中的点，f 是从 X 到 X 的一个映射或运动，把每一点 x 移到点 $f(x)$。方程 $f(x)=x$ 的解恰好就是在 f 这个运动之下被留在原地不动的点，故称不动点。于是，解方程的问题就化成了找不动点这个几何问题。不动点理论研究不动点的有、无、个数、性质与求法。研究方法主要是拓扑的和泛函分析的。1910 年荷兰数学家 L. E. J. 布劳威尔(Brouwer)得到下述不动点定理：设 X 是欧氏空间中的紧凸集，则 X 到自身的每

个连续映射都至少有一个不动点。用这个定理可以证明代数基本定理:复系数的代数方程一定有复数解。J. 勒雷 20 世纪 30 年代初与 J. P. 绍德尔(Schauder)合作,把 L. E. J. 布劳威尔的不动点定理和映射度理论推广到巴拿赫空间形成了拓扑度理论。J. 勒雷和 J. P. 绍德尔还在泛函分析中应用不动点定理证明了微分方程解的存在性定理,这种方法现称为勒雷-绍德尔不动点方法。这是当时代数拓扑在泛函方程求解中富有成果的应用,至今仍是研究非线性微分方程解的存在性的有力工具。

J. 勒雷 20 世纪 40 年代开创了层论和谱序列理论的研究。层论是 J. 勒雷为研究代数拓扑而发展起来的,他原想用层论研究代数拓扑学,特别是纤维丛的同调论。因为层的概念十分自然地表现了代数簇每一点上都对应一个局部环。J. 勒雷为了把连续映射的局部性质和全局的上同调联系起来,引入了层系数的上同调。J. 勒雷引进的层论后经 A. 韦伊(Weil)、H. 嘉当(Cartan)、J. P. 塞尔(Serre)等人的改进,成为数学中一个重要工具,在不少数学分支中都有重要应用,特别是在复分析中,因为复分析中的基本问题是具有给定性质的全纯函数或亚纯函数的存在与多少。问题的局部解是容易的,关键在于如何将这些局部解连接成整体解。层论正是提供了从局部分析到整体分析这个过程的有力工具,也是处理比复流形更广泛的对象——复空间的最有效的方法。H. 嘉当曾利用层及纤维空间等在多复函数研究中取得了极大进展,库辛问题的解决就是一个例证。1954 年,J. 勒雷对纤维空间引入了谱序列的代数方法,用谱序列对纤维空间的同调计算得到了深刻的结果,并由此创立了谱序列的理论。谱序列现在已经成为同调代数中的一个重要的理论,也是研究同调模的一种重要方法。

J. 勒雷对李群与齐性空间拓扑也很有建树。在广义函数中,他讨论过广义导数。他还以留数的同调类的观点重新建立了多复变函数的积分表示论中的柯西-凡塔皮耶公式,清楚地(至少在极点成一流形的情况)定义了多复变函数的留数概念。他在双曲型

偏微分方程组和拉格朗日分析等方面也很有贡献。

J. 勒雷用数学观点开创了对粘性可压缩流体的纳维-斯托克斯方程组的边值问题解的存在性和解的性质的研究。在流体力学中,对湍流的研究是一个重要课题。湍流是流体的不规则运动,通常是由来自外部的扰动引起的,但是在定常状态下,湍流并不由扰动本身的直接作用来维持,而是由流动内部的不稳定性来维持。J. 勒雷 1943 年就提出,湍流和维纳-斯托克斯方程的弱解的可能的非惟一性有关。他还认为,湍流是和纳维-斯托克斯方程组的解的缺乏光滑性联系在一起的。由于这方面的成就,他被誉为“现代粘性流理论的创立者”。20 世纪 70 年代他还对马斯洛夫(Moslov)指标进行了深入研究。

J. 勒雷在法兰西学院长期主讲泛函分析课程,而且他在进行泛函分析方面工作的同时,致力于改变过去古典分析的一些作法,这给 L. 施瓦尔茨留下了深刻的印象。J. 勒雷还是巴黎大学举办的拓扑学讨论班的主要报告人之一,这个讨论班独立发展了许多拓扑概念。

现在,J. 勒雷的三卷本论文集已经出版,这三卷论文集分别涉及代数拓扑、偏微分方程和多复变,每卷都有一个包括全部参考文献的详尽引言。这三个引言分别由著名数学家 A. 波莱尔(Borel),P. 拉克斯(Lax)和 G. 亨金(HenKin)精心撰写,对 J. 勒雷的工作给予了高度的、详细的评价、评介。

J. 勒雷在荣获沃尔夫数学奖之前,曾于 1938 年荣获罗马尼亚的 Malax 奖,1940 年荣获巴黎科学院数学方面的大奖,1971 年荣获 Lincei 的 Feltrinelli 奖。

J. 勒雷对科学与数学、教学与研究发表了一系列的见解。他说:“人类的科学知识在造福于所有国家之前,总是先为少数杰出人物所获得……今天,教学与研究所具有的重要作用不大为人所理解,数学教学在科学教学中的地位引起了争议,数学教学的艺术也正在丧失。”[11]“科学对于技术的飞跃发展及其对一个国家国力

的贡献，已为历史所证实。然而，这却是历史中被大大忽略了的一章。例如，人们都还记得创建于 1870 年的德意志帝国的强盛，它以压倒优势超过了它以前的帝国，包括法兰西帝国和英帝国。惟一能超过它的仅有新兴的美国。然而，人们知道那位创造了空前高质量的科学教学，从而给德意志帝国带来无比繁荣的科学和科学技术的学者的名字吗？他就是 C. F. 克莱因。他的埃尔朗根纲领，使人们弄清了不仅存在一种几何学，而且有许多种几何学；他的关于自守函数的论述，使人们清楚地了解了 J. H. 庞加莱的巨大发现。"[11]"作为学者，帮助人们去体验一些科学发现，以便使人们有能力去理解别人的发现，使更多的人去讲授、去运用、去完善其他的发现，这难道不应该是学者们的志趣所在吗？"[11]关于学习科学的方法，J. 勒雷认为："学习科学不是靠读，而是靠理解。科学不是静止呆板的字母，书籍不能保证她永恒的青春。科学是一种有生命的思想，为了对她产生兴趣，进而掌握她，人们必须在精明的人的指导下，用自己的头脑去重新发现她。"[11]关于数学的地位，J. 勒雷说："我们是否应当首先强调数学教学在整个科学教学中的地位呢？根据 A. 孔特(Comte)的分类，数学是科学之首。……数理逻辑在默默无闻的情况下，为计算机时代的到来提前做好了准备；理论物理学家仍对新的数学理论抱有难以抑制的好奇心，并希望借此最终达到他的目标。所以，从认识论的观点来看，人们应给数学科学以无上的地位。"[11]"法国资产阶级革命和 B. 拿破仑一世曾经给予数学最高地位。"[11] J. 勒雷强调指出："对于那些已经进入高等学府的优秀学生来讲，已经有了一个幸运的前景：那就是在科学和技术领域中更为自由地运用数学。正是数学的广泛用途，使它实质上成为基础的科学。观察并不等于简单地看，它的目的在于把看到的东西模式化，建立起数学所揭示的抽象世界与现实世界之间的联系。所有的观察科学、经济科学和人文科学都需要几何、泛函分析、组合分析、概率论、群论、集合论等等。正是数学越来越频繁、越来越广泛的应用，证实了对数学教学的迫

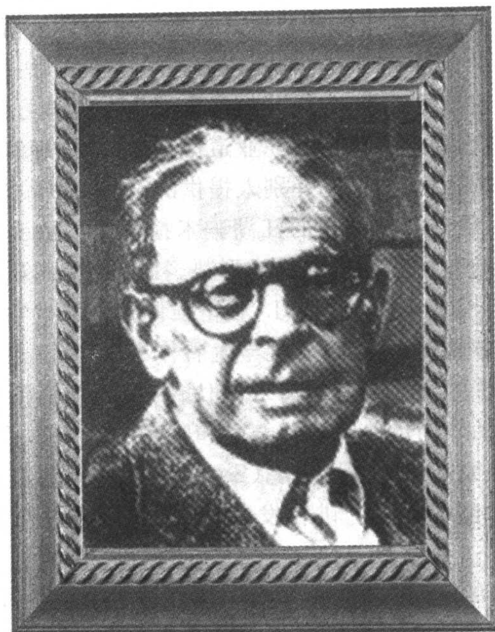
切需求。”[11]“因此，让所有那些对数学有兴趣、具有理解能力的孩子们去掌握、去获取最有用的数学是极为重要的，特别是掌握G. W. 莱布尼茨(Leibniz)、I. 牛顿(Newton)的那些发现。18世纪法国百科全书学派中的一些优秀人物就是满怀激情地去领会那些发现的。”[11]对于教师，J. 勒雷认为：“学校里的每一位教师大都是某个班的重要负责人，他应该使本班学生专心学习并充满活力，一般而言，他也应具有崇高的职业道德，能很好地理解他所要教的东西。他能明智地评价、选择别人提供的教材，并听取教育学方面的各种忠告，除非某种高超的江湖骗术搅昏了他的头脑。他也会尽力使自己的教材适应于当时的形势、社会的需要及周围环境的需求等等。”[11]对于教学计划，J. 勒雷强调指出：“教学计划必须符合实际。要尊重学生，既不要把学生看作小成年人，也不要把他们当作接受训练的宠物或者做游戏的伙伴，因为他们渴望学校安排些新奇的活动来满足他们的好奇心和旺盛的求知欲。”[11]他强调：“教学的根本原则还是苏格拉底(Socrats)的那句名言：‘不是宣读写好的课本，也不是登上讲台发表高见，而是通过对话去发现真理。’”[11]

1970年9月在法国尼斯举行了国际数学家大会，J. 勒雷担任大会主席，这次盛会在他的出色主持下开得既高效又有新意。

J. 勒雷对数学执著追求，非常勤奋刻苦。在第二次世界大战期间，被关进集中营里时，但他仍矢志不渝，在集中营极其艰苦的条件下，坚持不懈地研究、思考数学问题，并发现了“层”与“谱序列”这两个极其重要的工具。对此，英国著名数学家M. F. 阿蒂亚在1988年给予他很高的赞誉，他说：“过去许多伟大的数学家在极为艰难的环境中创造出了他们的杰作；在当代，我们有J. 勒雷的例子——他在集中营里革新了现代拓扑学。”[12]

J. 勒雷于1998年11月10日逝世，终年92岁。

A. 韦伊
(Weil, André)



“A. 韦伊的著作在20世纪数学中是独一无二的，即预见性方面(他“看”得见未来)与古典的精致相结合。阅读和学习他的著作，和他一起共同讨论，是我数学生涯中最大的愉快。”[160]

——J. P. 塞尔(Serre)

“严格性对于数学家，就如道德之对于人。”[16]

—A. 韦伊

A. 韦伊是法国数学家，1906 年 5 月 6 日生于法国巴黎。

由于他在数论、代数几何、微分几何、复几何、李群及其不连续子群、拓扑学等领域所取得的光辉成就，1979 年荣获沃尔夫数学奖，时年 73 岁。

A. 韦伊出生于一个犹太人的家庭，父亲是医生，原籍阿尔萨斯，母亲生在俄国，原籍奥地利。A. 韦伊自幼勤奋好学，对古典语言（拉丁文、希腊文和梵文）很爱好，对数学极有天赋。16 岁就考入了巴黎高等师范学校。在学习期间，他一方面精读了许多经典名著，一方面关心着最新的课题。1925 年毕业时才 19 岁，并通过了法国教师的学衔考试。毕业后曾先后到罗马、哥廷根、柏林等地游历，遇到一些杰出数学家，如 D. 希尔伯特、E. 阿廷、J. 冯诺依曼、C. L. 西格尔，深受当时正在兴起的抽象代数及拓扑学的影响。1928 年回国后，便写出了论文《代数曲线上的算术》，并获得博士学位，时年仅 22 岁。1929 年，他又去罗马，研习泛函分析及代数几何，这对他后来的工作产生了深刻的影响。1930—1932 年他去印度阿里格尔的穆斯林大学任教授，其后在马塞当了一年讲师。1933—1939 年他回到本国斯特拉斯堡大学任教。1939 年第二次世界大战爆发时他去芬兰，被误当作苏联间谍，差一点被枪毙，后来被转到法国，监禁在鲁昂，在对他不服兵役加谴责之后被释放。在经历了各种惊险后，他于 1940 年去了美国。在美国教了几年书，然后于 1945 年去巴西圣保罗大学任教。1947—1958 年任美国芝加哥大学教授，1958 年任普林斯顿高等研究所教授，并在那里度过了他一生的最后 40 年。A. 韦伊是法国科学院院士和美国国家科学院的外籍院士。

A. 韦伊是法国布尔巴基学派的创始成员和杰出代表之一。他思维敏捷，才华横溢，被誉为 20 世纪最伟大的数学家之一，在国际数学界公认的纯数学和应用数学的 19 个领域中，至少有 8 个领域 A. 韦伊都做出显著贡献，它们分别是代数、数论和算术代数几何、代数几何、微分几何及大范围分析、拓扑、李群和李代数、分析、

数学史。他 20 岁时，就写出了第一篇论文《论负曲率曲面》，把卡勒曼不等式由极小曲面推广到一般的单连通曲面，并指出它对于多连通曲面不成立。1922 年起开始研究当时刚刚兴起的泛函分析，接着就进入了他的主攻领域——数论。20 世纪 20 年代初，他推广了 L. J. 莫德尔(Mordell)的工作，从而得出了莫德尔-韦伊定理，即设 A 为在有限次代数数域 k 上定义的 n 维阿贝尔簇，则 A 上的 k 有理点全体构成的群 A_k 是有限生成的。$n=1$ 的情形是 L. J. 莫德尔 1922 年证明的，一般情形是 A. 韦伊 1928 年证明的。另外，设 m 为有理整数，则商群 A_k/mA_k 为有限群，称为弱莫德尔-韦伊定理，它是莫德尔-韦伊定理证明的基础之一，并亦被用于西格尔定理的证明中。A. 韦伊的这项成就既使莫德尔的定理得到了推广，又开辟了不定方程的新方向。20 世纪 30 年代末，他研究了拓扑群上的积分问题，证明了一致局部紧豪斯多夫空间的连通分支是可数个紧集的和，从而得知一致局部紧空间具有星形有限性。1938 年他引入了一致空间的概念，用对角线的邻域定义了一致结构，从而奠定了一致拓扑结构的基础。1936 年他写完了专著《拓扑群的积分及其应用》(但 1940 年才出版)，此书反映出的数学结构主义体现了布尔巴基学派的观点，它开辟了群上调和分析的新领域。20 世纪 40 年代，他潜心于把代数几何学建立在抽象代数和拓扑学的基础上。1946 年，他在把相交理论奠基于抽象域上的同时，把几何思想引进抽象代数理论之中。由此，他把 H. 哈塞等人开创的单变量代数函数理论的算术化推广到多变量的情形，从而开辟了一个新方向。A. 韦伊根据他的交变理论，在抽象域的情形下重新建立 F. 塞韦里(Severi)的代数对应理论，并成功地证明了关于同余 ζ 函数的相应黎曼猜想。他把古典的阿贝尔簇的理论纯代数地建立起来，包括特征 p 的情形。他的这些工作建立了完整的代数几何学体系，使得他在 1946 年出版的《代数几何学基础》成为一本经典著作，它为代数几何学的发展奠定了严密的抽象代数基础，极大地推动了代数几何理论及其应用的发展。他

所确立的数域上或有限域上的代数几何被称为数论代数几何，形成独立的领域。1948 年，A. 韦伊抛开了分析学而用纯代数方法成功地建立了阿贝尔簇的理论，从代数几何学的角度看这不仅是重要的，而且对于代数几何在数论方面的应用，也具有极其重要的意义。A. 韦伊的阿贝尔簇的代数几何理论，推动了希尔伯特第 12 个问题研究的发展。1949 年，他引入了代数簇同余 ζ 函数的定义，并提出代数方程在有限域中解的个数的“韦伊猜想”。他的这个猜想揭示了特征 p 的域上流形理论与古典代数几何之间的深刻联系，因而在国际数学界引起了轰动。他自己证明了这个猜想的若干特殊情形。数学界为了证明这个猜想所做的研究，使代数几何获得了长足的进展。1952 年，A. 韦伊证明了黎曼猜想成立的充分必要条件为在伊代尔群 J_k 上定义的某个广义函数是正定的。1951 年，他引进了所谓韦伊群，用它定义了最一般的 L 函数，并将 E. 阿廷(Artin)的 L 函数与 E. 黑克(Hecke)的具有特征标的 L 函数作为特例。1962 年，他把万有域 k 上的不可约仿射簇简单地叫做簇，而把有限个簇(或簇的开集)利用双正则映射拼在一起来定义跟 J. P. 塞尔意义下的不可约代数簇等价的概念称为抽象代数簇。对自守函数，1967 年，他得出了比一般满足某种函数方程的狄利克雷级数与某种自守函数形式也一一对应的更一般的结果。A. 韦伊和其他数学家将实数直线上的调和分析理论，包括 N. 维纳的广义陶伯型定理在内的一般理论，应用赋范环的理论推广到局部紧阿贝尔群的情形，这一理论称为“阿贝尔群上的调和分析”。他引入陈(省身)-韦伊同态，建立了卡勒(Kählar)流形理论，还证明了微分几何中高维高斯-博内公式。他还提出了椭圆曲线的重要猜想以及高度理论，并发展了黑克理论。另外，他对微分方程动力系统也颇有建树。

A. 韦伊的主要专著有：《数论基础》(1967 年)、《拓扑群的积分及其应用》(1940 年)、《代数几何学基础》(1946 年)等。

世界著名的斯普林格(Springer)出版社 1980 年出版了 A. 韦

伊的三卷文集。这三卷文集收集了 A. 韦伊除专著外的全部数学论著，包括已发表过的文章，和过去未发表的、不易得到的原始资料。最具特色的新内容是 A. 韦伊本人对自己这些论文的精确评论，或解释这些论文的产生背景，使人很受启发。A. 韦伊的文集反映了他广泛的兴趣和渊博的学识，并可以看出他对当代数学的许多领域所产生的重要影响。著名数学家、菲尔兹奖及沃尔夫奖得主 J. P. 塞尔评论："A·韦伊的著作在 20 世纪数学中是独一无二的，即预见性的方面（他"看"得见未来）与古典的精致相结合。阅读和学习他的著作，和他一起共同讨论，是我数学生涯中最大的愉快。"[160]

1980 年，美国数学会向 A. 韦伊颁发了斯蒂尔终身成就奖，表彰他对 20 世纪的数学领域，特别是他做出过奠基性工作的诸多领域的巨大影响。A. 韦伊 1980 年还荣获了经国家科学院推荐，由哥伦比亚大学颁发的巴纳德奖章，并于 1994 年荣获了日本的京都奖。

A. 韦伊是布尔巴基学派的精神领袖。数学结构的观念是布尔巴基学派的主要观点，他们把数学看成关于结构的科学，认为整个数学学科的宏伟大厦，可以不借助直观而建立在抽象的公理化的基础上。他们从集合论出发，对全部数学分支给以完备的公理化。在他们的工作中，结构的观点处于数学的中心地位。他们认为最普遍、最基本的数学结构有三类，即代数结构、序结构、拓扑结构，他们把这三种结构称为母结构。对每一种母结构再附加上新的公理，就可以构成一种新的结构。另外，母结构之间还可以经过混合和杂交，有机地组成一些新的关系，衍生出一些多重结构。比如，拓扑代数、李群等就是代数、拓扑几种母结构结合的产物，实数是这三种结构有机结合在一起的结果。因此，在布尔巴基学派看来，三个基本结构就像神经网络那样渗透到数学的各个领域，乃至贯穿全部数学。整个数学就是由各类数学结构所构成，把门类万千的数学分支统一于结构之中，这就是他们的基本观点。

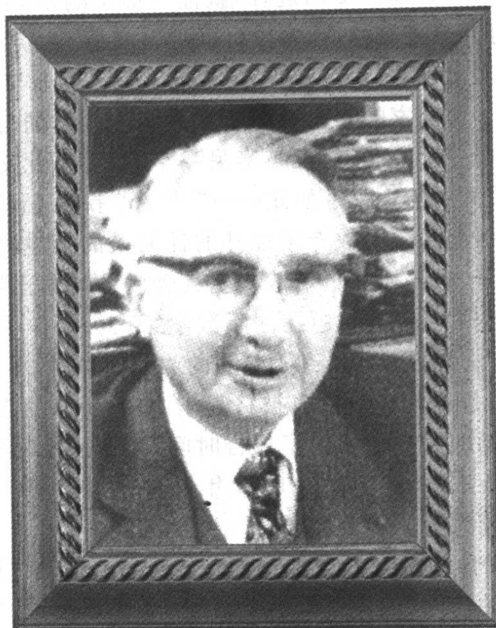
A. 韦伊对数学史也很有见地。他的《数论:从汉漠拉比到勒让德的历史研究》对数论史作了详尽而深刻的描述与分析。他和他的学派认为:"数学历史的进程,就像一部交响乐的乐理分析那样,一共有好几个主旋律,你多少可以听出来某一特定的主旋律是什么时候首次出现的,然后,这个主旋律又怎么逐渐与别的主旋律融会在一起。作曲家的艺术就在于把这些主旋律同时进行编排,有时小提琴奏一个主旋律,长笛奏另一个,然后彼此交换,就这样继续下去,数学的历史正是如此……"[14] A. 韦伊还说:"当一个数学分支不再引起除了少数专家以外的任何人的兴趣时,这个分支就快要僵死了,只有把它重新栽入生气勃勃的科学土壤之中才能挽救它。"[91] 1978 年,他应邀在国际数学家大会上作了《数学的历史、根由与方法》的报告,受到了热烈的欢迎。当时,不仅大会会场座无虚席,而且连转播教室也被挤得满满的,听众达 2 500 多人,况且此次活动的通知还印错了报告时间,可见盛况之空前。这也是 A. 韦伊第三次(第一次是 1950 年,第二次是 1954 年)被邀请在国际数学家大会上作全会报告。

A. 韦伊于 1976 年秋曾应邀到我国访问。他说:"这是一次给我极深印象的访问。"[35] 日本著名数学家小平邦彦说:"A. 韦伊很热情,对青年人很亲切。"[47]

A. 韦伊治学严谨,忌浮如深。他有一句名言:"严格性对于数学家,就如道德之于人。"[16]

A. 韦伊于 1998 年 8 月 6 日逝世,终年 92 岁。

H. 嘉当
(Cartan, Henri)



"在 H. 嘉当……和许多其他人的领导下，多维的解析函数和流形的理论得到了一个几乎全新的有代数和拓扑参与的结构。"[28]

——L. V. 阿尔福斯(Ahlfors)

"对数学的所有重要分支进行综合研究，看来时机已经成熟。"[18]

"虽然数学真理是永恒的，但是，听任在初等学校中教授方法停滞不前、一成不变，则是危险的。应该让青年人接触一些目前已被公认的基本概念。"[18]

——H. 嘉当

H. 嘉当是法国数学家,1904 年 7 月 8 日生于法国南锡。

由于他在复变函数、代数拓扑、同调代数等领域的杰出贡献,1980 年荣获沃尔夫数学奖,时年 76 岁。

H. 嘉当是法国著名数学家 E.J. 嘉当的长子,从小受到父亲的良好教育与数学熏陶。他 1923 年进入巴黎高等师范学校学习,1926 年毕业,1928 年获博士学位。他在博士论文中证明了布洛赫(Bloch)猜想并作了推广。1928—1929 年在中学任教。1929 年到里尔大学任教。1931 年到斯特拉斯堡大学任教,1936 年成为该校教授。1940 年到巴黎大学任讲师。1945—1947 年他回到斯特拉斯堡大学任教。1947 年起任巴黎大学教授。1969 年改任奥赛理学院教授。后在巴黎南大学任教授。1947—1965 年期间他还同时任巴黎高等师范学校教授。1965 年当选为法国科学院通讯院士,1974 年成为该院院士。1971 年被选为英国皇家学会会员。他也是欧洲、美国、日本等 12 个科学院的院士,还有多所大学授予他荣誉博士学位。1967—1970 年任国际数学联合会主席。H. 嘉当是法国布尔巴基学派的创始成员和杰出代表人物之一,并担任过法国数学会会长。

H. 嘉当对多复变函数论做出了突出的贡献。多复变函数论是数学中研究多个复变量的全纯函数的性质和结构的分支学科,有时也称多复分析。它形成较晚,但发展迅速,它虽然有着经典单复变函数的渊源,但由于其特有的难度和复杂性,在研究的重点和方法上,都和单复变函数论有显著的区别。H. 嘉当于 20 世纪 20 年代开始从事单复变函数的研究,但很快就转向了多复变函数。当时,单复变函数已经成熟,而多复变函数的研究却困难重重。但他迎着困难上,经过不断地探索,获得了一系列成果。1930 年,他证明了解析映射的惟一性定理。1931—1932 年,他证明了全纯域一定是伪凸域这一经典结果。1934 年,他证明了全纯凸性可以刻画全纯域。1935 年,他在 C^2 中域的分类理论方面证明了有界域的最大自同构群 G 为有限维实李变换群,对域中任意一点 P,点 P

的迷向子群 H_p 为 G 的紧子群。20 世纪 40 年代,H. 嘉当关于解析函数的理想的研究,连同日本数学家岡洁(Oka Kiyoshi)的具有不定域的理想的研究,发展为解析凝聚层的理论。他得到对 G 复解析流形 M 内每个解析的集 A,在 A 上取值为 0 的 M 上的全纯函数的芽所成的层 $\mathscr{T}(A)$是解析的凝聚层。20 世纪 50 年代,他利用全新的方法,把单复变函数论中的外尔斯特拉斯定理和米塔·列夫勒定理推广到多复变量情形。H. 嘉当和 J. P. 塞尔利用凝聚解析层的理论,将全纯域的基本理论系统地推广到斯泰因空间上,从而得到斯泰因空间的基本定理——嘉当定理 A 与 B:前者说,斯泰因空间上的任何凝聚解析层在每一点都可由有限个整体截面生成;后者说,对于斯泰因空间 M 上的任何凝聚解析层 F,上同调 $H^k(M,F)=0,\forall k\geqslant 1$,从而把库辛问题推广到斯泰因流形上并加以解决。H. 嘉当的工作,使多维的解析函数和流形的理论得到了一个几乎全新的有代数和拓扑参与的结构。1953 年他引进了环式空间,推广了解析空间,并给出环式空间是解析空间的重要条件。

H. 嘉当对代数拓扑和同调代数都极有建树。代数拓扑是拓扑学中主要依赖代数工具来解决问题的一个分支。同调代数源于代数拓扑学,它是代数学的一个非常重要的分支,也是随着同调论的发展而形成的一种方法,把代数学中以往作个别研究的一些问题,用统一的观点,给予强有力的展开而形成一个一般体系。同调代数的理论已经变成研究环、一般代数、李代数与群的一种不可缺少的有力工具。在同调代数中,H. 嘉当于 1950 年证明了内射分解是存在的,且除链等价外是惟一的。1954 年,他和 J. P. 塞尔等人在重要的空间的上同调运算及同伦群等方面都取得了显著的进展,他还用所谓嘉当构造的想法完全决定了艾伦伯格-麦克莱恩复形的(上)同调结构。1950 年他又研究了齐性空间的上同调,并得到了一个重要公式。在一般拓扑学中,他引进了“滤子”、“超滤”等重要概念。

H. 嘉当对代数拓扑学的贡献,还表现在 1948 年末他在巴黎

高等师范学校举办了以代数拓扑学为研究对象的讨论班。这个讨论班不但系统地总结了代数拓扑学的发展，而且有效地推动了拓扑学的研究工作，并为传播布尔巴基学派的数学观点和研究风格做出了贡献。这个讨论班还系统地发展了纤维丛概念，结合新的研究方法构成了完整的理论，得到了许多新的结果。他们还研究了李群的拓扑，并把李群理论发展成代数群的理论。H. 嘉当出色的教学工作和他组织的著名讨论班，培养出了许多学生，其中有的已经成为当代优秀的数学家。

H. 嘉当在位势论方面有很高的成就。位势的概念来源于物理学中的万有引力理论。由于 G. F. B. 黎曼把位势论和函数论统一处理，以及现代分析的基础理论（如泛函分析、测度论、广义函数、拓扑学等）在位势中的深入应用，位势论成了数学领域内比较彻底地完成了现代变革的一个分支。它同黎曼曲面、偏微分方程、调和函数、概率论等都有着密切的联系。在位势论中，H. 嘉当系统应用"能量"的概念，得出具有有限能量的测度的牛顿位势族并非希尔伯特空间，证明出"有限能量的正分布空间是完备的"这一定理。他引进了"精细拓扑"的概念，对解决位势论公理化及与概率论的关系等问题都起着重要作用。设 E 是能量为有限的测度所构成的空间，他得到在牛顿核的情形下，如果在 E 上比较一些常用拓扑，则它们依粗、细、弱、强的顺序排列，排在后面的拓扑强于排在前面的拓扑，而对能量有界的测度的任意序列$\{\mu_n\}$，细、弱、强收敛是等价的。他证明了古典位势论的若干重要定理，并首先在齐性空间上引进了位势理论。

H. 嘉当对数学发表了不少深刻的见解。他认为："数学的各种分支，在过去几十年里，已发展到这样的地步，致使对几乎每个数学家来说，专门化竟变成了一种必要。只有那些像 D. 希尔伯特或 J. H. 庞加莱式的才华出众的人物，才有希望精通整个数学。而对于大多数的数学家来说，要了解数学全貌，并掌握各分支之间的内在联系，实在太困难了。"[18]不过，H. 嘉当又说："对数学的所

有重要分支进行综合研究，看来时机已经成熟；这种研究，应该……使各科目之间的基本联系得以理解。"[18]对公理体系，H. 嘉当发表了如下意见："公理体系的选择不是完全随意的。人们对于根据不同的公理体系得出的理论，有着不同程度的兴趣。在数学中，没有一种普遍规则可以用来衡量什么是有趣味的，什么是没有趣味的。只有对现有理论的彻底了解，对手头问题的深刻估量，或者突如其来，出乎意料的一闪念，才能使研究人员选择合适的公理体系。当一种体系能用于种种情况时，它才是合适的。"[18] H. 嘉当在谈到代数结构时说："近几十年来，我们目睹代数在数学中名副其实地到处渗透，特别是 20 世纪 20 年代以后，在 A. E. 诺特(Noether)的推动下，数学家日益清楚地意识到代数基本概念在数学的几乎所有分支中所起的作用；更确切地说，例如，他们意识到有可能把纯代数中某些多少算是深刻的定理用来考虑分析问题。……随着目前数学的这种代数化，任何研究人员再也不能无视近世代数这一必不可少的工具了。反之，代数也从这种形势下得益匪浅，因为拓扑与分析不断向代数提出一些新问题，产生了几十年前也许几乎无法想像的进展。"[78]对于数学教学，H. 嘉当认为："中学的数学教学，至少在最后一个学年，理应受到这个演变的影响。"[18]他强调："虽然数学真理是永恒的，但是听任在初等学校中教授方法停滞不前、一成不变，则是危险的。应该让青年人接触一些目前已被公认的基本概念，虽然同时也要让他们经常能从实际事例中吸取营养。当前数学的教育，尤其在几何方面，依然受希腊思潮的影响，其影响之深，实属惊人。在课堂上，如果有多少旧的思想已经过时，那就应该引进多少新的思想去代替它。当然，突然把一切都推翻也是愚蠢的，特别是在德国和法国，数学教学中有着光辉的传统，多少应受到尊重。但一定程度上的改革已经成为必要，并且我感到这种改革已经在我们两国中展开了，对于这种改革，布尔巴基学派或许能作一些适度的、间接的贡献。"[18]

H. 嘉当的主要专著有：《同调代数》(与艾伦伯格合著，1956

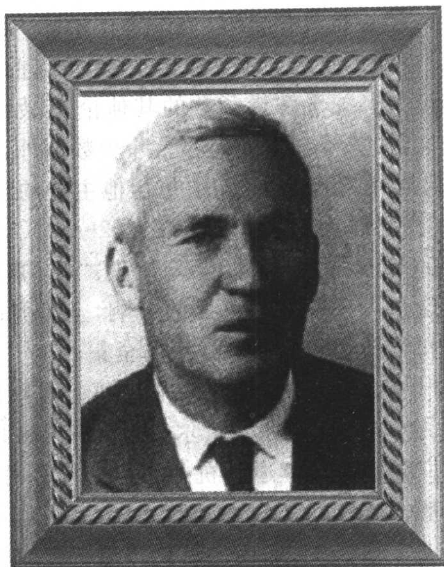
年)、《微分学、微分形式》(1967 年)、《解析函数论初步》(此书已译成中文,由高等教育出版社 1983 年出版)等。

世界著名的斯普林格(Springer)出版社 1979 年出版了《嘉当全集》,共三卷。第一卷载有简历、工作简介和著述(包括书和讨论班报告)目录。该卷还收进了 H. 嘉当 1939 年以前发表的全部解析函数方面的论文。关于解析函数的其他论文,如关于斯泰因流形和凝聚层论文,构成第二卷的内容。除少数例外,第三卷收载了 H. 嘉当所有其他方面的论文,其中包括他主持的 1954—1955 年间艾伦伯格-麦克莱恩代数讨论班的报告(2—11)。《嘉当全集》的编者 R. 雷默特(Remmert)和 J. P. 塞尔说:"H. 嘉当的论著及数学活动对我们这一代有着如此巨大的影响,全世界的数学家都将很高兴能阅读和利用这样一位数学家的全集。"[17]

H. 嘉当于 1985 年 12 月曾应邀来我国上海参加中国数学会成立 50 周年大会,并在会上以《佩尔(Pell)-费马(Fermat)》为题作了学术报告。会后他又应邀到杭州大学数学系作了题为《我所知道的布尔巴基(Bourbaki)》的报告。

2004 年 7 月 8 日是 H. 嘉当的百岁寿辰。《数学杂志》2004 年 4 月号刊登了法国数学会发布的新闻,以及几篇祝贺 H. 嘉当百岁寿辰的祝辞。其中一篇是巴黎南大学 Luc Illusie 撰写的,他曾在 1963 年参加了嘉当讨论班。他深情地写道:"我们今天仍然非常欣赏像嘉当讨论班这种为青年数学家组织的讨论班的重要性。……H. 嘉当在众多近代成果中选出内涵足够丰富,从而值得组织讨论班作深入研究的一个定理或一种理论……讨论班上要求彻底弄懂,不留盲区……这样的讨论班成为相互切磋的特殊场合,大家基于强烈的共同兴趣而获益良多。"[171]巴黎南大学的荣誉退休教授 Pierre、Samuel 以及法国国家研究中心的 Jean Cerf 也都发表了祝辞。他们很敬佩 H. 嘉当致力于法、德两国重新修好和人权事业。Cerf 写道:"谢谢您,嘉当先生,您的榜样告诉我们,人是能够越来越仁慈的。"[171]

A. N. 柯尔莫哥洛夫
(Kolmogorov, Andrei Nikolaevich)



“A. N. 柯尔莫哥洛夫的学术特点是把抽象的数学理论与自然科学实验融为一体，他既是理论家又是实践家。”[20]

——N. N. 博戈柳波夫等

“数学的应用是多种多样的，从原理上讲，数学方法的应用范围是无边际的，即物质的所有类型的运动都可以用数学加以研究。但是数学方法的作用与意义在不同情况下是不同的。用单一的模式来包罗现象的所有侧面是不可能的。”[21]

“只有那些自己对数学充满热情并且将之视为一门活的发展的科学的人，才能真正教好数学。”[158]

——A. N. 柯尔莫哥洛夫

A. N. 柯尔莫哥洛夫是苏联数学家。1903 年 4 月 25 日生于俄罗斯顿巴夫市。

由于他对概率论、调和分析、动力系统等做出的杰出贡献，1980 年荣获沃尔夫数学奖，时年 77 岁。

A. N. 柯尔莫哥洛夫的母亲死于分娩，他的父亲是位农艺师，但没有担起抚养他的责任。他由其姨母抚养成人。A. N. 柯尔莫哥洛夫 1920 年进入莫斯科大学学习，入大学前在铁路上当过列车员。在莫斯科大学学习期间，师从著名数学家 N. N. 卢津(Lujin)。A. N. 柯尔莫哥洛夫聪敏好学，他曾说“还在 5 岁或 6 岁时我就已经感受到数学‘发现’的乐趣，例如注意到等式 $1=1^2$，$1+3=2^2$，$1+3+5=3^2$，$1+3+5+7=4^2$ 中的规律等等。”[158] 当他 19 岁还是个大学生时就构造了 L^1 中的函数其傅里叶级数几乎处处发散的例子，接着又构造了 L^1 中的函数傅里叶级数处处发散的例子。这两个例子对于数学家们来说都是完全出乎意料的，并引起了极大反响，从而也使他声名鹊起。其后，他连续发表了许多研究成果。

A. N. 柯尔莫哥洛夫 1925 年毕业于莫斯科大学，1929 年研究生毕业，成为莫斯科大学数学研究所研究员。1930 年 6 月—1931 年 3 月访问哥廷根、慕尼黑及巴黎等地，并会见了一些杰出数学家，如 D. 希尔伯特、E. 兰道、P. 莱维、H. L. 勒贝格、C. H. H. 外尔、E. 波莱尔等，这对他后来的工作产生了深刻的影响。1931 年任莫斯科大学教授，1933 年任该校数学力学研究所所长。1935 年获物理数学博士学位。继于 1939 年当选为苏联科学院院士后，1966 年当选为苏联教育科学院院士。他还被选为荷兰皇家学会、英国皇家学会、美国国家科学院、法国科学院、罗马尼亚科学院以及其他多个国家科学院的会员或院士，并获得不少国外著名大学的荣誉博士称号。

A. N. 柯尔莫哥洛夫是 20 世纪最有影响的数学家之一，对开创现代数学的好几个分支都做出了重大贡献。

A. N. 柯尔莫哥洛夫是现代概率论的开拓者之一。概率论是研究随机现象数量规律的数学分支。概率论的产生,始于 17 世纪 B. 帕斯卡(Pascal)与 P. de 费马(Fermat)来往信件中讨论的有关掷骰子游戏的数学问题,主要是排列组合问题;同时也创立了关于排列、组合、二项式系数等理论。此后,由于 J. 伯努利(Bernoulli)、J. L. 拉格朗日等人的工作,概率论的内容逐渐增多,到 P. S. 拉普拉斯(Laplace)时所有古典概率的结构已完成,《分析概率论》(1812 年)就是 P. S. 拉普拉斯集大成之作。该书中收纳了到那时为止的主要结果,而且使用了差分方程及母函数的方法。19 世纪以后,概率论日益广泛地被应用于自然科学以至社会科学。但 P. S. 拉普拉斯所给出的先验概率的定义,在应用时引起了种种争论。1925 年以后,A. N. 柯尔莫哥洛夫与 A. J. 辛钦(Hincin)共同把实变函数的方法应用于概率论。1933 年,A. N. 柯尔莫哥洛夫的专著《概率论的基础》出版,书中第一次在测度论基础上建立了概率论的严密公理体系,这一光辉成就使他名垂史册。因为这一专著不仅提出了概率论的公理定义,在公理的框架内系统地给出了概率论理论体系,而且给出并证明:相容的有限维概率分布族决定无穷维概率分布的“相容性定理”,解决了随机过程的概率分布的存在问题;提出了现代的一般的条件概率和条件期望的概念并导出了它们的基本性质,使马尔可夫过程以及很多关于随机过程的概念得以严格地定义并论证,这就奠定了近代概率论的基础,从而使概率论建立在完全严格的数学基础之上。20 世纪 20 年代,在概率论方面他还作了关于强大数律、重对数律的基本工作:他和辛钦成功地找到了具有相互独立的随机变量的项的级数收敛的必要充分条件;他成功地证明了大数法则的必要充分条件;证明了在项上加上极宽的条件时独立随机变量的重对数法则;得到了在独立同分布项情形下强大数法则的必要充分条件。A. N. 柯尔莫哥洛夫是随机过程论的奠基人之一,20 世纪 30 年代,他建立了马尔可夫过程的两个基本方程。他的卓越论文《概率论的解析方

法》为现代马尔可夫随机过程论和揭示概率论与常微分方程及二阶偏微分方程的深刻联系奠定了基础。他还创立了具有可数状态的马尔可夫链理论,找到了连续的分布函数与它的经验分布函数之差的上确界的极限分布,这个结果是非参数统计中分布函数拟合检验的理论依据,成为统计学的核心之一。1949 年,格涅坚科和柯尔莫哥洛夫发表了专著《相互独立随机变数之和的极限分布》,这是一部论述 20 世纪 30 年代以来,柯尔莫哥洛夫和辛钦等以无穷可分律和稳定律为中心的独立随机变量和的弱极限理论的总结性著作。在 20 世纪 30～40 年代,柯尔莫哥洛夫建立了希尔伯特空间几何与平稳随机过程和平稳随机增量过程的一系列问题之间的联系,给出了这两种过程的谱表示,完整地研究了它们的结构以及平稳随机过程的内插与外推问题等。他的平稳过程的结果(N. 维纳也得到了平行的结果)创造了一个全新的随机过程论的分支,在科学和技术上有广泛的应用;他的关于平稳增量随机过程的理论对于各向同性湍流的研究有深刻的影响。20 世纪 60 年代,他还将概率论用于研究语言学并取得了颇赋启迪性的成果,即做诗的概率方法和用概率实验法确定俄语语音的熵。此外,他还开创了预报理论。

20 世纪 50 年代中期,A. N. 柯尔莫哥洛夫开创了研究函数特性的信息论方法。他引进了度量空间 ε 熵集的概念,从而得到了函数族与空间《度量地积》的评估方法。1956 年他意外地发现:每一个不论是多少变元的连续函数都可以表示成三元连续函数的叠加。1957 年,他的学生 V. I. 阿诺尔德(Arnol'd)证明了每个三元函数均可表示为二元函数的叠加,从而对于连续函数的情形,解决了希尔伯特第 13 个问题。1957 年,A. N. 柯尔莫哥洛夫又证明了:在[0, 1]范围内的连续实函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 可以写成 $\sum_{i=1}^{7} h_i\,(g_{i1}(x_1)+g_{i2}(x_2)+g_{i3}(x_3))$ 的形式。其中,h_i 和 g_{ij} 是连续实函数,g_{ij} 可选得完全与 f 无关。这进一步证明了不管是多少变

元的连续函数都可以表示成一元(或多元)连续函数的叠加。20世纪60年代以后,他又创造了信息算法理论。

A. N. 柯尔莫哥洛夫独立地在拓扑学中引入了上边缘或▽算子的概念。利用这个算子,他先是对复形,而后是对任何一紧空间创立了上同调群理论。对于许多拓扑问题的研究,其中包括与连续映射有关的研究,上同调群概念提供了很方便和很有效的方法。他还是同时具有拓扑结构和代数结构的空间理论(线性拓扑空间、拓扑环)研究的开创者之一。在拓扑空间中,有以他的名字命名的柯尔莫哥洛夫公理,即:对于相异二点 x,y,至少存在一方,譬如 x 的领域,它不含有另一方,即 y。

A. N. 柯尔莫哥洛夫对动力系统理论做出了杰出贡献,他1954年被邀请在国际数学家大会作大会报告的题目就是动力系统。动力系统理论是经典常微分方程理论的一种发展。它着重在抽象系统而非具体方程的定性研究,其研究办法着眼于一族轨线间的相互关系,换言之,是整体性的。这个整体性有些是拓扑式的,也有些是统计式的,后者主要是遍历性。A. N. 柯尔莫哥洛夫开创了关于哈密顿系统的微扰理论与K(柯尔莫哥洛夫)系统的遍历理论。他把经典力学与信息论结合起来,在20世纪50年代,解决了非对称重刚体高速旋转的稳定性和磁力线曲面的稳定性。在他的工作基础上,V. I. 阿诺尔德和J. K. 莫泽完成了以他们三人姓氏命名的KAM理论。他在动力系统与遍历理论中引进了 K 熵,对于具有强随机性动力系统的内部不稳定性问题的分析起了重要作用。

关于湍流内部结构的研究,A. N. 柯尔莫哥洛夫等人提出的统计理论占主导地位,他还引入了局部各向同性湍性的概念,从物理的观点对能量传播进行了考察,并利用考察的结果和量纲分析推导出能谱函数,即在雷诺数很大的平衡领域中的能谱 $E(K)\propto K^{-5/3}$(其中,K 是在波数空间内球的半径)。他的能谱函数目前已得到相当多的实验根据。

A. N. 柯尔莫哥洛夫在数学的许多分支都提出了不少独创的思想，导入了崭新的方法，构成了新的理论，对推动现代数学的发展做出了卓越的贡献。他的学术特点是把抽象的数学理论与自然科学实验融为一体。他既是理论家又是实践家。他既是一个抽象的概率论公理学者又是从事一般产品质量统计检验的研究人员。他既研究理论流体力学，又亲自参加海洋考察队。A. N. 柯尔莫哥洛夫认为："数学是现实世界中的数量关系与空间形式的科学"，[21]"……因此数学的研究对象是来自现实之中的。然而作为数学加以研究时，必须离开现实素材(数学的抽象性)。但是，数学的抽象性并不意味着完全脱离现实素材。"[21]他还认为："数学的应用是多种多样的，从原理上讲，数学方法的应用范围是无边际的，即物质的所有类型的运动都可以用数学加以研究。但是数学方法的作用与意义在不同情况下是不同的，用单一的模式来包罗现象的所有侧面是不可能的。"[21]

A. N. 柯尔莫哥洛夫不但是杰出的数学家，而且是优秀的教育家，他指导过 60 多名博士和副博士。他认为在大学的数学教育中，好的教师应该是：(1)讲课高明，比如能用其他科学领域的例子来吸引学生；(2)以清晰的解释和宽广的数学知识来吸引学生；(3)善于作个别指导，清楚每个学生的能力，在其能力范围内安排学习内容，使学生增强信心。他还强调指出：学生在开始搞研究的时候，首先必须使其树立起"自己能搞出点名堂"的自信心，因而在给他们布置研究课题时，不但要考虑"这样的题目的重要性"，还应考虑"这个研究是否能提高学生的水平"、"是否在学生能力范围内，而且需要作最大程度的努力才能解决问题。"他认为在数学领域出成就的可能性大的青年人应具有以下三种能力：(1)算法能力——对于复杂式子作高明的变形，对于用标准方法解不了的方程式作巧妙的变换的能力(仅记住许多定理、公式是不行的)；(2)几何直观能力——对于抽象的东西，能够在头脑中像画画一样描绘出来并加以思考；(3)一步一步地作逻辑性推理的能力——例如，能够

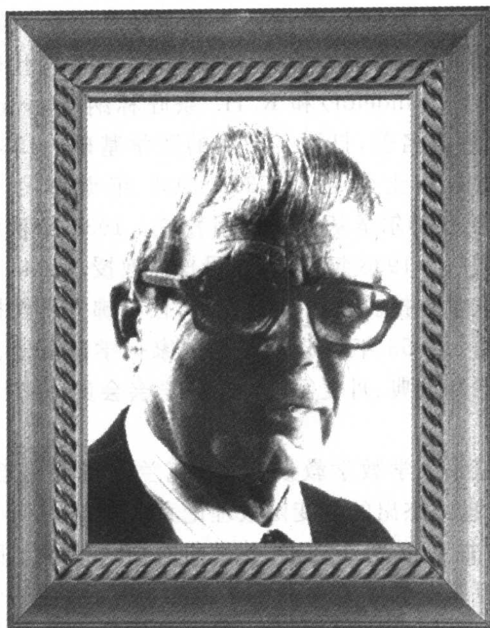
正确地应用数学归纳法。A. N. 柯尔莫哥洛夫非常关心和重视基础教育，并亲自领导了中学数学教科书的编写工作。他培养了许多优秀的数学家，如 I. M. 盖尔范德、A. I. 马尔采夫（Mal'cev）、B. V. 格涅坚科（Gnedenko）、V. I. 阿诺尔德等。A. N. 柯尔莫哥洛夫胸襟开朗，他总是具有把青年人吸引到他研究工作中去的魅力，并形成以他为首的学派。A. N. 柯尔莫哥洛夫曾说："只有那些自己对数学充满热情并且将之视为一门活的发展的科学的人，才能真正教好数学。"[158]

日本著名数学家伊藤清（Itô Kiyoshi）说："A. N. 柯尔莫哥洛夫在数学的几乎所有领域中，都提出了独创性的思想，导入了崭新的方法，他的业绩是非常辉煌的。"[21] A. N. 柯尔莫哥洛夫的论著总计有 230 多种，涉及的领域包括实变函数论、测度论、集论、积分论、三角级数、数学基础论、拓扑空间论、泛函分析、概率论、动态系统、统计力学、数理统计、信息论等多个分支。他的论著被译成中文的有：《概率论的基础》（商务印书馆，1952 年）、《函数论与泛函分析初步》（高等教育出版社，1957 年）等。另外，他主编的《几何》、《数学・算术》也被译成了中文，分别由人民教育出版社于 1978 年和高等教育出版社于 1957 年出版。

由于 A. N. 柯尔莫哥洛夫的卓越成就，他七次荣膺列宁勋章，并被授予苏联社会主义劳动英雄的称号。他还是列宁奖金和国家奖金的获得者。1949 年获苏联科学院的切比雪夫奖，1963 年获得国际巴尔参奖金，1986 年荣获罗巴切夫斯基奖。他还获得了赫尔姆霍兹金质奖章和其他许多奖。

A. N. 柯尔莫哥洛夫于 1987 年 10 月 20 日逝世，终年 84 岁。

L. V. 阿尔福斯
(Ahlfors, Lars Valerian)



“L. V. 阿尔福斯是20世纪杰出的复变函数理论家。……对他的学生及世界各处向他学习的同行来说,L. V. 阿尔福斯的确是他们的楷模和良师。”[133]

——S. G. 克兰茨(Krantz)

“我们生活在激动人心的时代。各个科学领域都取得了巨大的进展。……与数学相关的计算机已使世界面貌为之一新,……数学领域内激动人心的事更是层出不穷。”[25]

——L. V. 阿尔福斯

L. V. 阿尔福斯是芬兰裔美国籍数学家，1907 年 4 月 18 日生于芬兰赫尔辛基。由于他对复变函数论的突出贡献，1981 年荣获沃尔夫数学奖，时年 74 岁。他还于 1936 年荣获了首届菲尔兹奖。

L. V. 阿尔福斯 1925 年就读于赫尔辛基大学，1928 年毕业。在大学学习期间，他有幸受到著名数学家、芬兰现代数学奠基者 E. L. 林德勒夫(Lindelöf)和 R. H. 奈旺林纳(Nevanlinna)的教导，并阅读了许多名著，打下了坚实的数学基础。1930 年以一篇优秀论文获得博士学位。1930—1932 年游学于欧洲各国。1932—1936 年在赫尔辛基大学任副教授。1936 年秋应聘为美国哈佛大学副教授。1938 年回国，在母校任教授。1944—1946 年任瑞士苏黎世大学教授。1946 年去美国，任哈佛大学教授。1952 年加入美国国籍。1953 年当选为美国国家科学院院士。他还是芬兰科学院院士和瑞典、丹麦等国的皇家学会会员，并曾任美国数学会副主席。

美国华盛顿大学教学教授 S. G. 克兰茨曾评论道："L. V. 阿尔福斯是 20 世纪杰出的复变函数理论家。在 60 多年的研究工作中，他在亚纯曲线、值分布理论、黎曼曲面、共轭几何、极值长度、拟共形映射及克莱因群等方面做出了重大贡献，对他的学生及世界各处向他学习的同行来说，L. V. 阿尔福斯的确是他们的楷模和良师。"[133]

复变函数论是数学中一个基本的分支学科，它的研究对象是复变量的函数。复变函数论历史比较悠久，内容极为丰富，理论十分完美。它在数学的许多分支、力学以及工程技术科学中有着广泛的应用。复变函数论始于 18 世纪 L. 欧拉(Euler)、J. R. 达朗贝尔(d'Alembert)、P. S. 拉普拉斯(Laplace)的研究工作，但它的全面兴起则是在 19 世纪。A. L. 柯西(Cauchy)、G. F. B. 黎曼(Riemann)、K. T. W. 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)是复变函数论的三个主要奠基人。复变函数论的主要内容包括单值解析函数论、黎曼曲面理论、几何函数理论、自守函数和模函数理论、广义解

析函数论、值分布理论、复变函数逼近理论等。L. V. 阿尔福斯在复变函数论中取得了一系列的成就。他在 1929 年的博士论文中出色地证明了法国函数论专家 A. 当茹瓦(Denjoy)于 1907 年提出的猜想:即如果整函数的阶为 p,有限渐近值的个数为 n,则这两个数之间有如下关系:$n \leqslant 2p$。他的证明获得了他的老师 R. H. 奈望林纳的高度评价,这时他年仅 22 岁。

L. V. 阿尔福斯证明了阶为 $p \geqslant 1/2$ 的亚纯函数的反函数,最多有 $2p$ 个直接超越奇点,而当 $p < 1/2$ 时,最多有一个这样的奇点。在亚纯函数中,有以他的姓氏命名的阿尔福斯五圆盘定理。另外,L. V. 阿尔福斯是拟共形映射理论的创始人之一。在研究 R. H. 奈望林纳理论(关于整函数及亚纯函数的值分布理论)的几何意义时,他作了细致的观察,发现奈望林纳理论的几何形式并不要求有关函数一定是(局部)共形映射,而只要求它们是(一致)拟共形映射,从而开始探讨拟共形映射的理论。

L. V. 阿尔福斯还阐明了奈望林纳特征函数的几何意义。他引进了微分度量,并用拓扑的方法建立了覆盖面的理论作为它的应用,得到了奈望林纳理论和关于亚纯函数的许多其他结果。这个理论还辨明了皮卡例外值的个数 2 的拓扑意义,它与球面的欧拉示性数——2 相联系。L. V. 阿尔福斯的这一成就使数学界为之瞩目。因为这个理论不仅从拓扑学的观点,而且能从结合度量的观点去研究覆盖面,均归结为一条以 L. V. 阿尔福斯的姓氏命名的基本定理,而这条定理在黎曼曲面之间解析映射的值分布理论以及其他很多领域都有广泛的应用。L. V. 阿尔福斯还与法国数学家 A. 韦伊(Weil)共同建立了阿尔福斯-韦伊全纯曲线理论,与另外一些数学家共同发展了拟保角映射理论及其他工具,并把它们应用于黎曼面的参模问题。他应用艾彻上同调理论和位势,建立了他的有限性定理。在关于函数族的零集方面,他用函数族来刻画集合的大小;他利用关于带形域的畸变定理,导出了角微商存在的充分必要条件。

1947 年，L. V. 阿尔福斯做出了施瓦兹引理的推广，证明了 n 连通区域的极值函数由一个全纯映射 f 所给定。这里的 f 是 n 对一的映区域到单位圆盘上的映射，现在称为阿尔福斯映射。关于一个平面域内的某个曲线族，其长度和域的面积的关系，在函数论中已得到广泛应用，为使之一般化，L. V. 阿尔福斯引进了被称之为关于曲线族的极值长度的量。在 L. V. 阿尔福斯等人的影响下，许多数学家对泰希米勒空间（即紧曲面或有限型曲面上附带一定拓扑条件的复解析结构组成的空间）进行了广泛深入的研究，L. V. 阿尔福斯还首先给出了该空间自然的复结构。他深入地研究了与亏格为 $g(g>1)$ 的黎曼曲面相联系的泰希米勒空间 T_g 在某种自然的意义下构成一个 $3g-3$ 维复流形的有关问题。L. V. 阿尔福斯的工作使这一领域成为单复变函数论最活跃的分支。

L. V. 阿尔福斯虽然不是研究几何学的，但他的工作充满了深刻的几何观念。他的工作使微分几何在函数论的各方面都得到辉煌的应用。一个典型的例子是他对施瓦兹引理进行的影响深远的推广。法国数学家 C. E. 皮卡（Picard）最先抽出了施瓦兹引理的几何内容，把它解释为庞加莱度量下有关弧长的一个命题，而 L. V. 阿尔福斯则证明了这个命题的适用范围要广泛得多，适用于具有一定曲率约束的许多度量。同时，由于他揭示出施瓦兹引理在偏微分方程中的根本性质，所以在某种程度上使这个引理摆脱了作为几何命题的约束，其方法的一般性使这个结果可能推广到高维以及许多不同的映射类。同样，L. V. 阿尔福斯对奈旺林纳理论的各种几何处理，使得后来的许多高维推广成为可能。

1982 年，L. V. 阿尔福斯出版了他的论文选集，从该选集中可以看出他对数学做出的丰富多彩的贡献。L. V. 阿尔福斯的其他主要专著还有：《拟保角映射教程》、《复分析》、《保形不变量》和《黎曼曲面》（与 L. R. 萨廖（Sario）合著）等。为了表彰他的前三本著作，美国数学会 1982 年授予他斯蒂尔奖。他的《复分析》自 1953 年出版后，在近半个世纪以来一直被誉为学习复变函数理论的优

秀教材,该书第一版中译本在 1962 年出版,1984 年上海科学技术出版社按照原书 1976 年第三版进行了重译,此书以选材精炼、叙述严谨、处理巧妙见长。在《复分析》第一版的序言中,L. V. 阿尔福斯写道:"作者在本书中大量地运用了'明显地'、'显然地'、'不证自明地'等字眼。用这些词,并不是为了使内容模糊不清。相反,它们是用来检测读者的理解能力。因为若读者不理解'明显地'、'显然地'、'不证自明地'所代表的含意的话,那就最好翻回到前几页重新开始。"L. V. 阿尔福斯在讲课时,每当用到像'显然地'这样的词时,他便会微笑着环顾一下课堂,随后给出一个具体的实例来解释清楚。在芬兰及美国,L. V. 阿尔福斯培养了一批复分析专家。

L. V. 阿尔福斯曾先后于 1936 年、1862 年和 1978 年三次被邀请在国际数学家大会上作一小时的大会报告,主要内容是关于他在三个不同的领域所做的开创性工作。这也说明在长达 40 年的时间里,他在国际数学界都一直处于权威地位。

L. V. 阿尔福斯对数学的贡献和他的个人风范受到了其学生和数学界的高度评价。瑞典乌普萨拉大学数学教授 D. 海哈尔(Hejhel)曾说过:"当我还是一个可塑造的学生时,L. V. 阿尔福斯就以他一贯的方式,教了我很多关于怎样做一个数学家和怎样寻求有质量的成就的知识。……我觉得,在我作为一个数学工作者的早期遇到这样的人是一种特别的幸运。"[133] 美国密歇根州立大学的 T. 乔根森(Jorgensen)说:"很荣幸认识 L. V. 阿尔福斯长达四分之一世纪。他是一个令人振奋的数学家,一个很特别的人。他对数学的兴趣和引导以及工作能力使他成为一个持续 60 年的事业的和谐的领导者。"[133] 美国明尼苏达大学数学教授 A. 马登(Marden)说:"L. V. 阿尔福斯被看做一位典型人物,不仅因为他的数学研究的品味和风格,而且因为他在职业生涯中的表现。……当代复分析界的学者普遍认为,除了 R. H. 奈旺林纳以外,只有 L. V. 阿尔福斯一人有资格赢得人们的广泛尊敬。原因之一

是 L. V. 阿尔福斯在这个领域的多数活跃分支中做了杰出的工作，……原因之二是 L. V. 阿尔福斯客观地考虑和公正地支持其他数学家。”[133]

第二次世界大战末期，L. V. 阿尔福斯为了筹足从芬兰到瑞士苏黎世的路费，曾被迫典当过他获得的菲尔兹奖金质奖章。L. V. 阿尔福斯是这样评述这件事的：“获得菲尔兹奖带给了我一个很实在的好处。当被允许离开芬兰去瑞典时，我很想搭火车去我妻子那儿。可是我身上至多只有 10 克朗。怎么办呢？我翻出菲尔兹奖章，把它在当铺当了，从而有了足够的路费。……我确信那是惟一在当铺停留过的菲尔兹奖章，后来我一有钱便请瑞典的朋友帮忙赎回了它。”

L. V. 阿尔福斯对数学发表了许多深刻的见解，他曾指出：“从 19 世纪中叶以来，复变量的解析函数（特别是一个复变量的函数）的理论曾经在经典分析中起了支配的作用。在 19 世纪和 20 世纪交替之际，以 J. H. 庞加莱（Poincaré）、C. F. 克莱因（Klein）、C. E. 皮卡（Picard）、E. 博雷尔（Borel）、J. 阿达马（Hadamard）这些人为中心，出现过一个明显的高峰。另一个繁茂时期发生在 20 世纪 20 年代，出现了奈望林纳理论。接下去的十年是一个停顿，但这是假象，很多后来结出丰硕果实的思想都是在那时孕育的。”[28]“战时和战后头几年自然是停滞阶段。战后，最先从中得到动力的数学领域是拓扑和多复变函数，并取得了很大的进展。在 H. 嘉当（Cartan）、H. A. L. 贝恩克（Behnke）和许多其他人的领导下，多维的解析函数和流形的理论得到了一个几乎全新的有代数和拓扑参与的结构。作为这个进展的一个结果，仍在研究共形映射的保守的分析学家和研究层理论的比较激进的一派之间的隔阂扩大了。有时，好像一维的理论已经失去生命力了，正在陷入老调重弹的危险之中，隔阂一直存在着。但是，我将尽力使大家相信，经过一段很长的路程之后，老式的理论又复原了，而且进行得很好。”[28]

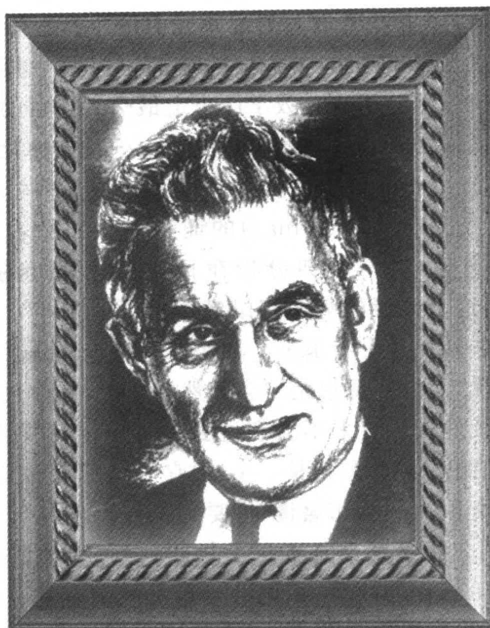
L. V. 阿尔福斯说："我们生活在激动人心的时代。各个科学领域取得了巨大的进展。……与数学相关的计算机已使世界面貌为之一新，巨型计算机正在制造中。最后，人工智能也许对人们的生活带来威胁，但也可能为人类带来光明前景。数学领域内激动人心的事情更是层出不穷。近几年，悬而未决的一些猜想出乎意料地得到解决或部分解决。数学历史上最引人注目的四色问题已由两位数学家借助于计算机获得解决。……重大的数学问题的突破甚为频繁，……典型的是当代世界著名代数几何学家的巨大努力推进了 G. 法尔廷斯(Faltings)的证明……"[25]"古典分析对许多猜想都有贡献。"[25]"古典分析在日益靠拢邻近的数学分支，……我自信，这个健康的势头将继续下去。"[25] L. V. 阿尔福斯还说："我的方法是从过去看未来。加快前进的步伐是必然的。除非发生特殊情况，人们的思想是不会突然变化的，数学也会基本上像过去一样继续发展。将来不会和过去一模一样，我愿把它比作海市蜃楼。比伯巴赫猜想就曾是一个，但它已经变成现实之物。谁能知道什么时候下一个'海市蜃楼'将要变成极乐的'绿洲'呢？"[25]

L. V. 阿尔福斯虽然加入了美国籍，但仍对他的祖国怀着深厚的感情。1978 年，在他的祖国芬兰首都赫尔辛基召开的国际数学家大会上，听着雄壮而亲切的"芬兰颂"时，他激动不已，并在一小时大会报告的开头说："我极其感谢一小时报告人选举委员会，他们给了我很大的荣誉，尤其是使我有机会在我出生的城市里向全世界的数学家作报告。从我童年以来，这个城市已经发生了很大的变化，但是，当我回到这个在我脑海里留下很多记忆的地方，我仍然感到兴奋。真的，诸位，今天对我更是极不寻常。"[28]

1986 年的国际数学家大会在美国伯克利举行，适逢颁发菲尔兹奖 50 周年纪念，经与会者口头表决，由 L. V. 阿尔福斯——首届菲尔兹奖得主之一，担任这次大会的名誉主席，并由他亲自将本届菲尔兹奖章和奈望林纳奖授予四名获奖者。

L. V. 阿尔福斯于 1996 年 10 月 11 日逝世，终年 89 岁。

O. 扎里斯基
(Zariski, Oscar)



“今天任何一位在代数几何方面想作严肃研究的人，将会把 O. 扎里斯基和 P. 塞缪尔(Samuel)写的交换代数的两卷专著当作标准的预备知识。”[29]

—G. 伯克霍夫(Birkhoff，美国数学家)

“意大利的几何学家树立了……一座惊人的琼楼：代数曲面理论。”[30]

—O. 扎里斯基

O. 扎里斯基是俄裔美国籍数学家,1899 年 4 月 24 日生于俄罗斯的科布林。

他因通过与交换代数融合而为代数几何学创造了现代方法,1981 年荣获沃尔夫数学奖,时年 82 岁。

O. 扎里斯基 1913—1920 年就读于基辅大学,1921 年赴意大利留学,先在比萨大学,半年后转到罗马大学,1924 年获罗马大学博士学位。1925—1927 年接受国际教育委员会资助作为研究生继续在意大利研究数学。1927 年到美国约翰斯-霍普金斯大学任教,1937 年成为教授。1936 年加入美国国籍。1945 年访问巴西圣保罗。1946—1947 年间任伊利诺伊大学的研究教授。1947—1969 年任哈佛大学教授,1969 年成为哈佛大学的名誉教授。O. 扎里斯基 1943 年当选为美国国家科学院院士,1951 年被选为美国哲学学会会员,1965 年荣获由美国总统亲自颁发的美国国家科学奖章。

O. 扎里斯基对代数几何做出了重大贡献。代数几何是现代数学的一个重要分支学科,与数学的许多分支学科有着广泛的联系。它研究关于高维空间中由若干个代数方程的公共零点所确定的点集,以及这些点集通过一定的构造方式导出的对象,即代数簇。从观点上说,它是多变量代数函数域的几何理论,也与从一般复流形来刻画代数簇有关,进而,通过自守函数、不定方程等和数论紧密地结合起来。从方法上说,则与交换环论及同调代数有着密切的联系。

O. 扎里斯基早年在基辅大学学习时,对代数和数论很感兴趣,在意大利深造期间,他在古典代数几何领域深受三位意大利数学家 G. 卡斯泰尔诺沃(Castelnuovo)、F. 恩里克斯(Enriques)、F. 塞维里的影响。意大利几何学者们的研究方法本质上很富有"综合性",他们几乎只是根据几何直观和论据,因而他们的证明中往往缺少数学上的严密性。O. 扎里斯基的研究明显带有代数的倾向,他的博士论文就与纯代数学有密切联系,精确地说是与伽罗

瓦理论密切相关。他的博士论文主要是把所有形如 $f(x)+tg(x)=0$ 的方程分类。这里，f 和 g 是多项式，x 可以解为线性参数 t 的根式表达式。O. 扎里斯基说明这种方程可分为 5 类，它们是三角或椭圆方程。取得博士学位后，他在罗马的研究工作仍然主要是与伽罗瓦理论有密切联系的代数几何问题。到美国后，他受 S. 莱夫谢茨(Lefschetz)的影响，致力于研究代数几何的拓扑问题。在 1927—1937 年间，O. 扎里斯基给出了关于曲线 C 的经典的黎曼一罗赫定理的拓扑证明，在这个证明中他引进了曲线 C 的 n 重对称积$C(n)$来研究 C 上度数为 n 的除子的线性系统。

1937 年 O. 扎里斯基的研究发生了重要的变化，其特点是变得更代数化了。他所使用的研究方法和所研究的问题都更具有代数的味道(这些问题当然仍带有代数几何的根源和背景)。O. 扎里斯基对意大利几何学者的证明感到不满意，他确信几何学的全部结构可以用纯代数的方法加以重新建立。在 1935 年左右，现代数学已经开始兴盛起来，最典型的例子是 A. E. 诺特与 B. L. 范德瓦尔登(Van der Waerden)有关论著的发表。实际上代数几何的问题也就是交换环的理想的问题。B. J. 范德瓦尔登从这个观点出发把代数几何抽象化，但是只取得了一部分成就，而 O. 扎里斯基却获得了巨大的成功。在 20 世纪 30 年代，O. 扎里斯基把 W. 克鲁尔(Krull)的广义赋值论应用到代数几何，特别是双有理变换上，他是从这方面来奠定代数几何的基础，并且做出了实质性的贡献。O. 扎里斯基和其他的数学家在这方面的工作，大大扩展了代数几何的领域：首先，由复数域到一般域；其次，由代数曲线、曲面推广到一般代数簇，定义是完全内蕴的，也就是抛掉装着代数簇的外围空间。他还证明了下述扎里斯基主要定理："如果双有理对应在正规定 p 外不是正则的，那么 p 的象的各个分支的维数$\geqslant 1$。"由此阐明了双有理对应的性质。对于奇点解消问题，即射影空间中任意不可约代数簇都能够双有理地变换为射影空间内的不带奇点的代数簇，在特征为 0 及维数$\leqslant 3$ 时，他给出了证明。1944

年，他又证明了特征为 0 的域上三维代数簇的奇点可以解消。域 k 上的不可约代数簇 V，如果它的函数域在 k 上是纯超越的，就称为一个有理簇。O. 扎里斯基给出了判别代数闭域上的完备光滑曲面 S 是有理的一个充分必要准则。这个重要准则，现在称为卡斯泰尔诺沃-扎里斯基判别准则。关于代数曲面，O. 扎里斯基还严格地证明了卡斯泰尔诺沃的定理：设 L 为代数闭域 k 上两变量有理函数域 $k(x\ y)$ 的子域且包含 k，如果 $k(x\ y)$ 在 L 上为可分代数的，那么 L 是 k 上的二元有理函数域。在代数曲面的理论中，寻求与给定的代数曲面双有理等价的非奇异代数曲面的问题，是这个领域中最基本的问题之一，O. 扎里斯基在特征为 0 的域上给出了基于赋值论的纯代数的证明。关于代数曲面的分类，O. 扎里斯基和其他数学家给出了完整的结果。他还引进正规簇和正规化的概念，并应用于线性系、双有理变换及代数对应等理论中。关于诺特环，他得出：若半局部整环 R 是一个域上的有限生成环的商环，则 R 是解析非分歧的，若 R 还是正规局部环，则 R 是解析正规的。他还指出，即使以更一般的理想的幂引入拓扑，一切理想仍是闭集。

在关于局部一致性的研究中，O. 扎里斯基导入了代数簇 V 上的拓扑，现在称为扎里斯基拓扑。在这个拓扑中 V 的闭子集就是 V 的代数子簇。在 1949—1951 年间，他发展了在簇 V 上的全形态方程以及在簇 V 的代数子簇上这种方程的解析连续性的半球理论，这个理论使他能够给出一个新的、严密的对退化原理和恩里克斯连续定理的证明。1950 年他还发展了局部环论。

1964—1978 年间，O. 扎里斯基主要关心两个新理论的发展：在簇 V 上的等奇异性理论和饱和性理论。等奇异性理论试图把 V 上等效的奇异性解释成在 V 的子簇 W 上的奇异点簇。从古典几何到现在，奇异的等效性只在代数曲线上有定义。因此 O. 扎里斯基只能对 W 具有维数 $r-1$ 而 V 具有维数 r 的情形下发展一个完全的关于等奇异性的理论。O. 扎里斯基与美国和外国其他

数学家(特别是法国数学家)后来致力于发展一个具有任何维数的簇 V 和其子簇 W 的等奇异性的可能性的一般理论。饱和性理论在某种意义上是等奇异性理论的特殊情况。这个理论是要对已经在 W 上等奇异性的 V 建立一个在最小意义下的等奇异性的标准,即它是在 W 上的解析乘积。O. 扎里斯基关于饱和性的一般定理的证明为这个标准提供了依据。

O. 扎里斯基对极小模型理论也做出了贡献。他在古典代数几何的曲面理论方面的重要成果之一,是曲面的极小模型的存在定理(1958 年)。它给出了曲面的情况下代数—几何间的等价性。这就是说,代数函数域一经给定,就存在非奇异曲面(极小模型)作为其对应的"好的模型",而且射影直线如果不带有参数就是惟一确定的。因此,要进行曲面分类,可考虑极小模型,这成了曲面分类理论的基础。

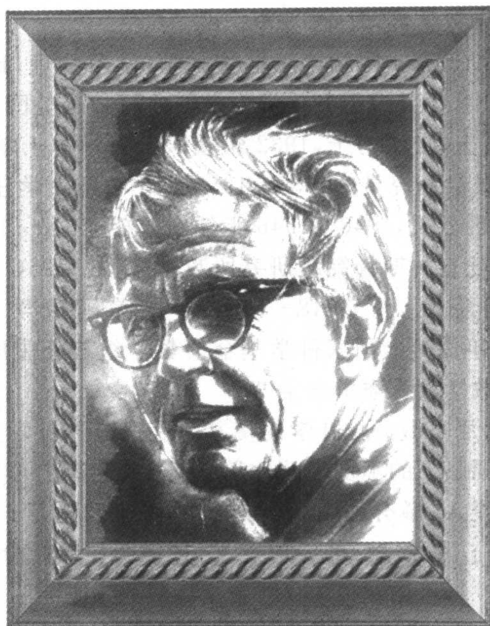
O. 扎里斯基的工作为代数几何学打下了坚实的基础。他不但对于现代代数几何的贡献极大,而且在美国哈佛大学培养起了一代新人,哈佛大学以他为中心形成了一个代数几何学的研究集体。1970 年度的菲尔兹奖章获得者广中平祐(Hironaka Heisuke)和 1974 年度的菲尔兹奖章获得者 D. B. 芒福德(Mumford)都出自他的这个研究集体。从某种意义上讲,广中平祐的工作可以说是直接继承和发展了 O. 扎里斯基的成果。

O. 扎里斯基的主要论文有 90 多篇,收集在《扎里斯基文集》中,共四卷。O. 扎里斯基的代表作有:《交换代数》(共两卷,与 P. 塞缪尔合著,1958—1960 年)、《代数曲面》(1971 年)、《拓扑学》等。

O. 扎里斯基的关于代数簇的四篇论文于 1944 年荣获由美国数学会颁发的科尔代数奖。由于他在代数几何方面的成就,特别是在这个领域的代数基础方面的奠基性贡献,使他荣获美国数学会 1981 年颁发的斯蒂尔奖。

O. 扎里斯基于 1986 年 7 月 4 日逝世,终年 87 岁。

H. 惠特尼
(Whitney, Hassler)



"H. 惠特尼看到了建立关于微分流形的嵌入定理的优点,从而开始了微分拓扑学的一系列研究。"[40]

—陈省身

"创造性的数学工作并非是少数天才的特权,它可以是我们之中有强烈愿望与充分自主性的任何人的顺乎自然的活动。"[31]

—H. 惠特尼

H. 惠特尼是美国数学家，1907 年 3 月 23 日生于美国纽约市。

由于他对代数拓扑、微分几何、微分拓扑所做出的贡献，1982 年荣获沃尔夫数学奖，时年 75 岁。

H. 惠特尼 1924 年就读于耶鲁大学，学习物理，1928 年取得学士学位，1929 年又取得音乐学士学位。后师从美国著名数学家 G. D. 伯克霍夫，攻读博士，1932 年获哈佛大学博士学位，继而任国家研究委员会研究员。1933—1952 年在哈佛大学任教，1935—1940 年任助理教授，1940—1946 年任副教授，1946—1952 年任教授。1952 年任普林斯顿高级研究所数学教授。1954 年当选为美国国家科学院院士。1948—1950 年任美国数学会副主席。1953—1956 年任美国国家科学基金会数学组首任主席。1979 年当选为国际数学教育委员会主席。

H. 惠特尼是微分拓扑学的奠基人。微分拓扑学是研究微分流形在微分同胚下的不变量的数学分支。微分拓扑学研究的主要课题有微分浸入、微分嵌入、微分同胚、协边理论等。H. 惠特尼 1936 年给出了微分流形的一般定义，并证明任何微分流形 M^n 可以嵌入于 R^{2n+1}，可以浸入在 R^{2n} 中。1937 年，他证明了微分流形的嵌入定理。在微分嵌入与浸入中有他给出的充分条件和必要条件。由于他看到了建立关于微分流形的嵌入定理的优点，从而开始了微分拓扑学的一系列研究：在微分流形中，他得出当 M 是仿紧的，则可知总存在从属于 M 的 C^γ 结构 C^ω 的结构。为了研究微分流形上向量场，他把流形及以其上每一点为原点的线性独立的切向量组全体总括在一起，给出了纤维丛的一般定义并引入了惠特尼示性类，从而使许多几何问题都与上同调（示性类）和同伦问题联系起来了。1939 年他证明了示性类的乘积公式，和以他的姓氏命名的“惠特尼和”概念，对纤维丛理论和代数拓扑学以极大推动。在簇的定性研究中，H. 惠特尼考虑把簇分解为流形，使之建立所谓惠特尼层化概念，惠特尼层化理论被 R. 托姆(Thom)用分

层集概念进一步加深，并且在奇点的局部及大范围的研究中起着重要作用。例如，所有半解析集都允许惠特尼层化。正如拓扑学中研究连续映射是重要问题一样，微分拓扑学中研究微分映射的性质是十分重要的课题，H. 惠特尼最早对微分映射的奇点理论进行研究。20 世纪 40 年代他在微分流形嵌入、浸入有关的奇点的工作，是可微映射的奇点理论的萌芽时期；1955 年他发表了关于平面到平面的映射奇点的工作，标志着奇点理论开始作为一门独立的分支登上了数学舞台。H. 惠特尼的《几何积分论》(1957 年)一书用解析方法来表示上同调理论，开拓了新领域。他定义的阿贝尔群的张量积是拓扑和同调代数的基本工具。他得出，拓扑空间 X 的以阿贝尔群 G 为系数的上同调群 $H^*(X;G)$，当 G 是单式交换环 R 时，$H^*(X;R)$ 的元素之间可以定义乘积，使得 $H^*(X;R)$ 成为分次代数。他还引进了 C^∞ 函数类的等价性定义，研究了这类函数的局部理论，得到了 n 个变元情形下的某些整体结果及其与实解析函数之间的关系。

H. 惠特尼对图论也很有建树。图论以图为研究对象，是应用比较广泛的一个数学分支。在许多领域，诸如物理学、化学、运筹学、计算机科学、信息论、控制论、网络理论、社会科学以及经济管理各方面都有广泛的应用。H. 惠特尼在四色问题上做出过重要贡献，并且开创了拟阵理论，该理论不仅很快在电路理论上得到了应用，而且大大扩展了一般组合理论。

H. 惠特尼不仅是杰出的数学家，还是著名的教育家，他认为："创造性的数学工作并非是少数天才的特权。它可以是我们之中有强烈愿望与充分自主性的任何人的顺乎自然的活动。"[31] 他说："学数学意味着什么？当然除非你能用它，否则毫无益处。最好的学习就是用，并且古今皆知仅在你有自己的想法时才有真正的学习。如果在某个时刻，学生感到有实在的自由去独立思考，他就可以把这种思考和别人提出的思想逐渐地紧密联系在一起。在其他时候，除了有些自然的想法外，他只能在压力下工作。学生和

教师二者都必须要了解这一点，并且需要大家朝此目标共同合作。……作为教师，帮助学生将他们的自然想法与你所教的东西联系起来的最可靠的办法是：真正的互相交流。一个漂亮的表述，对听者是个享受，但对于学生的思考却可能没有直接帮助。"[31]

H. 惠特尼对"研究的原理"发表了如下精辟的见解："实际的学问要通过探索，以及对你和他人探索结果的考虑而获得。"[31]"研究，基本上是探索某种状况。这种状况首先可能是比较模糊、可变，且大部分是未知的。当你进入一块处女地，'探索'就意味着巡回、试验、近看远眺，总之，是熟悉环境。对于一个小孩，就是检验一片叶子或一根细枝；对于数学家，就是尽量弄清楚某些特殊情形。一般地，应玩味你听、看到的，增加关于特殊情形的详细知识，建立数学思想在如何起作用的内在感觉。'洞察'力大部分来之于这种内在感觉。当你越来越熟悉这片处女地的时候，你可以开始组织，按某种特别的次序，或以某种图解或结构图的方式，找出将部分拼成整体的方法。然后，再仔细一点，看一下它们是如何配置在一起的。"[31]"在探索时，每件事情都要考虑到，这里没有什么'有用'或'无用'之分，应设法储存小的发现。虽然可能暂时被遗忘，它们还会以新的方式出现，并给出进一步组织与洞察的启示。"[31]"当你感到放松的时候，应检验一般的构思与遗忘的细节。你所建立的内在感觉往往帮助你产生新的观点，甚至导出问题的关键。在这种时候，你也会考虑你对这个特别的科目，甚至于你对数学研究的整个方法，也可能考虑到你将来如何生活。所有这些对你在数学或其他方面总的前途都是重要的。"[31]"随着普遍的原理及经验而来的，便是更为详尽的方法。一般说来，在'解决问题'的阶段，常用 G. 波利亚(Polya)所著《怎样解问题》作进一步的参考。最后，看一下 I. 牛顿是如何发现万有引力定律是非常有益的(见 I. B. 科恩(Cohen)，Newton's discovery of gravity scientific American，224(march，1981)，166)。"[31]

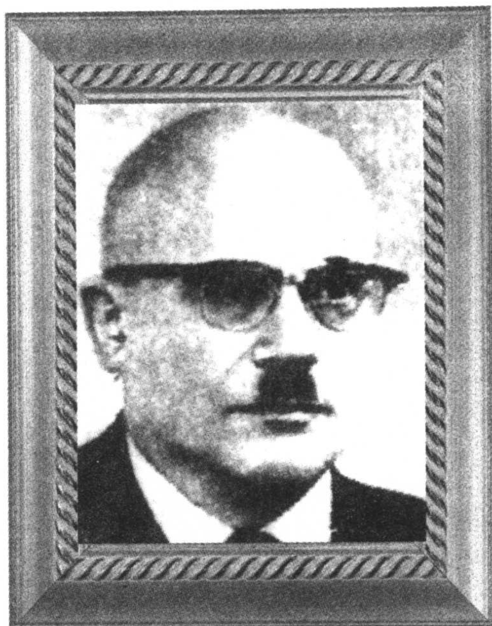
H. 惠特尼 1976 年荣获由美国总统亲自颁发的美国国家科

学奖章。1985 年获美国数学会颁发的斯蒂尔奖中的终身成就奖。

H. 惠特尼的主要专著有:《拓扑学》、《微分流形》、《几何积分理论》、《复解析簇》等。

H. 惠特尼于 1989 年 5 月 10 日逝世,终年 82 岁。

M. G. 克列因
(Krein, Mark Grigorrevich)



“在敖德萨,M. G. 克列因领导并推进了泛函分析和微分方程论的研究。”[33]

——摘自“苏联五十年来数学发展的基本道路”

“如果线性泛函分析是已前进了很远的科学,那么非线性泛函分析还仅仅在形成的阶段之中。……非线性问题的‘整体’研究则划归为非线性函数空间的几何及拓扑问题,并使用极深刻且精细的拓扑方法。”[32]

——M. G. 克列因

M.G. 克列因是苏联数学家,1907 年 4 月 3 日出生于乌克兰基辅。

由于他在泛函分析及其应用上所取得的重要成就,特别是创立泛函分析非自伴算子理论,1982 年荣获沃尔夫数学奖,时年 75 岁。

M.G. 克列因是犹太人,早年自学数学,14 岁时就在基辅工业大学听 B.N. 杰隆涅(Delone)的课程,1922—1923 年曾作为旁听生在基辅师范学院听数学家 D.A. 格拉韦(Glave)的数学课。1924 年到敖德萨就读,不久便成为数学家 N.G. 切博塔廖夫(Cebotarov)的研究生。1933 年以后在敖德萨、古比雪夫、哈尔科夫、基辅等地的高等学校和研究机关工作。1934 年任敖德萨大学教授。1938 年任莫斯科大学数学力学系教授。1939 年获物理—数学博士学位,同年当选为乌克兰科学院通讯院士。第二次世界大战后回到敖德萨的建筑工程学院研究数学,以后又在乌克兰科学院物理化学研究所研究数学。1979 年他被选为美国科学院国外院士。

M.G. 克列因主要的贡献是在泛函分析方面,并取得了丰硕的成果。他研究的课题涉及矩量问题、函数论、巴拿赫空间中的锥理论、参数共振理论、微分算子核、微分算子的谱理论、积分方程论、概率论、矩阵论等许多领域。

泛函分析是研究拓扑线性空间及这些空间之间满足一定拓扑和代数条件映射的数学分支。它是 20 世纪 30 年代形成的。半个多世纪以来,一方面,它不断地以其他众多学科所提供的素材来提取自已的研究对象和某些研究手段,并形成许多重要的分支,例如算子谱理论、巴拿赫代数、拓扑线性空间理论、广义函数论等等;另一方面,它也强有力地推动着其他不少分析学科的发展,并成为近代分析基础之一。它在微分方程、概率论、函数论、连续介质力学、量子物理、计算数学、控制论、最优化理论等学科中都有重要应用。它还是建立群上调和分析理论的基本工具,也是研究无限个自由

度物理系统的重要而自然的工具之一。今天,它的观点和方法已渗入到不少工程性的学科之中。M. G. 克列因对泛函分析很有建树。例如,在线性空间的一般理论中,他及其同侪们发现:如果 G 是空间 E 的子空间,为了 E 是自反的,必须且只须 G 及 E/G 都是自反的;凡有界正则凸集 $K\subset E^*$ 必是它的端点的集合 S 的正则凸鞘;如果 S 是在 E 中弱紧的集合,则(1)它的弱闭鞘是弱紧的及弱闭的,(2)它的凸鞘是弱紧的。另外,巴拿赫空间中锥论是与具有正核的线性积分方程论、矩量问题及具有正元的矩阵论的问题相联系着发生的,而这理论的基本概念及命题,包括锥概念本身,都是由 M. G. 克列因建立的。M. G. 克列因得到:E^* 中任意泛函可以表示成两个正泛函的差的必要且充分条件乃是锥 K 是正常的;设 $K\subset E$ 是正常锥,由空间 E 到某一重紧空间 Q 上的一切连续函数的空间 C_Q 的某子空间(这空间中的范数是 $\|x\|=\max\limits_{q\in Q}\left|x(q)\right|$)中,有一个一对一的双方连续线性映射存在,这映射使 K 中的元与非负函数对应。什么时候能够依上述性质把空间 E 映射于整个空间 C_Q 上?这一重要问题也由 M. G. 克列因成功地解决了,即其必要且充分的条件乃是其中的正常锥 K 是极小面的。M. G. 克列因开创了使一锥不变的连续算子论的研究,他得到:设 Γ 是把实心锥 K 内部映射到它的部分中的线性连续算子组成的交换集合,则必存在一正泛函 $\Psi\in K^*$。$\|\Psi\|=1$,而 Ψ 是自共轭算子 A^* 的公共特征向量;$A^*\Psi=\lambda_A\Psi(\lambda_A>0,A\in\Gamma)$。

在数学物理中常遇到的埃尔米特算子 A 大部分是半有界的,就是说它们满足

$$m(A)=\inf_{f\in D(A)}\frac{(Af,f)}{(f,f)}>-\infty$$

这样的算子恒具有超极大扩张 $\widetilde{A}$,使得 $m(\widetilde{A})=m(A)$。M. G. 克列因首先阐明在什么时候该扩张是一意的,此外,如果 γ 是预先固定的数,且 γ 不大于 $m(A)$,则凡满足 $m(A)\geqslant\gamma$ 的一切可能超级大扩张 $\widetilde{A}$ 也由 M. G. 克列因得出。他还得到了关于非完全埃尔

米特算子的基本定理。

M. G. 克列因联系着矩量问题的研究运用解析函数论的工具,发展了具有亏指数(1,1)的埃米特算子的特征理论。他建立了具有亏指数(1,1)的闭埃尔米特算子的一般理论。他还获得关于延续螺旋曲线弧问题的一切基本问题的答案。他应用广义矩量问题的方法,证明了对于每个螺旋曲线弧 $\xi_t(a\leqslant t\leqslant b)$,可以找到一个与它等距的曲线弧 $\xi_t^\prime(a\leqslant t\leqslant b)$,但一般讲不止一个。

M. G. 克列因还推广了著名的普朗谢雷尔定理。

M. G. 克列因关于非交换群上以及在带有群的流形上正定函数的研究得到了许多重要结果。他的方法建立在他关于埃尔米特算子的谱理论的基础之上。这方法之所以饶有兴趣,是由于在很多情形中,它可能解决定义于流形的超球中正定函数"延展"到整个流形上去(并保持正定性)的问题。

M. G. 克列因的工作是现代泛函分析思想与切比雪夫-马尔科夫学派经典理论的结合。他的贡献有力地推进了苏联对函数论、泛函分析、微分方程理论的研究。他的研究成果不但在力学和数学物理中有着广泛的应用,而且为分析数学注入了活力。

M. G. 克列因共发表论著 250 多种,其中包括一系列专著,如《线性非自伴算子理论导引》、《泛函分析》等。由此形成了以他为代表的敖德萨数学学派。

M. G. 克列因作为泛函分析的权威,在 1948 年对泛函分析的形成与发展发表了如下的精辟见解:"泛函分析之所以能迅速发展以至成为独立的学科,乃是由于 19 世纪至 20 世纪之交数学史上发生的几件大事:(1)分析中新部门的形成,从而发现了代数、几何,分析中不同领域中惊人的类似之处。……这些类似迫使人们去寻求一般结合的新观点,这正是泛函分析的特征。(2)非欧几里得几何的创立,及几何对象之转变到具有更一般性质的空间,并与康托的集合论结合产生出了一般抽象的空间理论,……在 19 世纪末及 20 世纪初发现了分析的几何化新运河,即函数被看成'函数'

空间中的点或向量。对应着由代数问题到分析问题的转变，正是由有穷维空间到无穷维空间的转化。这种几何工具的使用乃是现代泛函分析的特征，并且在关于这门数学的各种著作中这个问题起着决定性的作用。(3)实变函数论的发展(测度论、积分概念之推广等)。例如，希尔伯特空间之具体表现为函数空间只有把连续函数集合添加成具有平方可积可测函数的集合时才有可能。(4)近世代数的发展，它研究具有任意性质的对象的代数运算(一般的群论、环论等)。如此合成了现代的泛函分析，其根则滋生于数学物理的问题中(比如，边界值问题、变分问题、积分方程问题等等)，并且它还是现代几何的、函数的以及代数观点的高度综合。在泛函分析的发展中，不管在理论还是方法上却对不同数学分支的公共问题起到了特殊的作用。……泛函分析的精细方法结合着拓扑学方法，在数学物理方程的古典问题中有着广泛的应用。”[32] 1948年，M. G. 克列因就强调指出：“如果线性泛函分析是已前进了很远的科学，那么非线性泛函分析还仅仅在形成的阶段之中。在非线性问题中应当分辨‘局部’的研究与‘整体’的研究。‘局部’研究的基本方法，如同在古典分析中一样，乃是以线性的(或用‘多项式的’)形式去局部地近似非线性对象。非线性问题的‘整体’研究则划归为非线性函数空间的几何及拓扑学问题，并使用极深刻且精细的拓扑学方法。”[32]

M. G. 克列因于 1989 年 10 月 17 日逝世，终年 82 岁。

陈省身
(Chen Shing-Shen)



“假如没有E. 嘉当、H. 霍普夫、陈省身和另外几个人的几何构想,20世纪的数学是不可能有它的惊人进展的,我相信未来的数学进展还要依靠他们这样的数学工作者。”[35]

—A. 韦伊(Weil)

“在现代社会中,因为科学技术的进展,社会组织的日趋复杂,数学便成为整个教育的一个重要组成部分。”[41]

“我们的希望是在21世纪看见中国成为数学大国。”[41]

—陈省身

陈省身是华裔美国籍数学家,1911 年 10 月 26 日生于浙江省嘉兴市。

由于他对整体微分几何做出的卓越贡献,1984 年荣获沃尔夫数学奖,时年 73 岁。

陈省身 1926 年进入南开大学学习,师从于我国现代数学最早的富有成效的播种人之一姜立夫教授。陈省身曾说:“在姜先生的指导下,我感到念数学有无穷的乐趣。我在初等大学教育中所念的数学,都是他教的。”他 1930 年毕业于南开大学。1934 年毕业于清华大学研究生院。1936 年获德国汉堡大学理学博士学位。1937 年回国任西南联大教授。1943 年应邀前往美国普林斯顿高等研究所工作。1946 年返回祖国,经姜立夫教授推荐,领导中央研究院数学所。1949 年后定居美国,先后在芝加哥大学与加州大学伯克利分校任终身教授。1961 年当选为美国国家科学院院士,1963—1964 年任美国数学会副主席。他还获得多种学术荣誉称号,如英国皇家学会国外会员,法国科学院、意大利科学院国外院士,巴西国家科学院通讯院士,印度数学会名誉会员等。1975 年他荣获由美国总统颁发的美国国家科学奖章。1983 年荣获美国数学会颁发的斯蒂尔奖中的终身成就奖,获此奖时的评语中指出:半个世纪以来,他是微分几何的领袖人物,他的工作既深刻又漂亮。自 1972 年以来,他多次回国讲学,并担任了北京大学、南开大学、暨南大学以及其他许多大学的名誉教授和中国科学院系统科学研究所的名誉研究员、名誉学术委员。1984 年,他接受我国教育部的聘请,创办南开数学研究所,并任所长。1994 年当选为中国科学院的首批外籍院士。陈省身还荣获中国国际科技合作奖和首届邵逸夫数学科学奖。

陈省身是国际数学界整体微分几何学方面的领袖人物。在古典的意义下,微分几何学是应用微分学来研究欧几里得平面和空间中曲线、曲面等图形性质的一个数学分支。由于微分几何是以微分为主要研究工具而发展起来的,所以,它的研究多为小范围

的。与此相反,与给定图形或空间的整体相关联所确定的对象叫整体(大范围的)概念(或性质)。在现代微分几何中,以探讨微分几何(小范围的)性质和大范围性质之间的关联为目标的研究,引起了人们的极大兴趣。特别是随着微分流形概念的确立,李群的大范围理论的进展,以及拓扑学的发展,促进了整体微分几何的形成。

陈省身从撰写射影微分几何论文开始了他的数学生涯。他1931年在清华大学研究院发表的第一篇研究论文,就是关于射影微分几何的。他在汉堡大学的博士论文是研究E. 嘉当方法在微分几何中的应用。E. 嘉当是20世纪最伟大的数学家之一,他和C. F. 高斯、G. F. B. 黎曼被誉为历史上最伟大的三位微分几何学家。陈省身在汉堡取得博士学位后,即决定到巴黎追随E. 嘉当从事一年的博士后工作。陈省身后来回忆说:"这一年对我在数学研究发展上,影响极大……","而最重要的是E. 嘉当的数学语言和思想方法。"他后来利用E. 嘉当所创立的方法,开辟了一条自己的路。1937年他回到中国,任教于西南联大。在西南联大任教的6年中,他讲授了保形微分几何和李群等课程,并不断发表论文,声望渐隆。他在射影微分几何方面的工作,受到美国著名数学家、普林斯顿高等研究所教授O. 维布伦(Veblen)的赏识。他写的积分几何论文,把布拉施克学派的积分几何的工作推到了更高的阶段。文中的深刻见解,给当时享有国际声誉的大数学家C. H. H. 外尔和A. 韦伊都留下了很深的印象。1943—1945年,陈省身应邀到美国普林斯顿高等研究所从事研究工作,当时这里正是O. 维布伦、C. H. H. 外尔、A. 韦伊等数学精英的荟萃之地,这段时间是陈省身丰产的时期,他完成了著名的对高斯-博内公式的内蕴证明,这是微分几何中揭示局部性质与整体性质之间相互关系的一个有名范例。对此,陈省身深情地说过:"这可能是我一生最得意的文章。H. 霍普夫曾说:'这是微分几何最重要和困难的问题'。我的证明有新意,解决了技术上的困难,并开创了许多

新发展。这在科学研究中是很难得的。(所谓,文章千古事,得失寸心知。)”1946 年初,陈省身发表了一篇长达 30 页的论文《大范围微分几何的某些新观点》。在这篇论文中,陈省身揭示了 E. 嘉当的联络的几何思想与纤维丛理论有密切联系,从而进一步把微分几何推到大范围情形。此外,他还完成了示性类的研究,陈省身特征类为复矢量丛、代数流形及复流形的最简单,因此也是最基本的性质,它的应用延及理论物理及代数数论,由此引起的陈省身指标是指数论的基本工具。他与 C. H. H. 外尔和 A. 韦伊关系甚笃,结下了深厚情谊。陈省身与著名数学家 S. 莱夫谢茨(Lefschetz)也相知良深,S. 莱夫谢茨任《数学年刊》主编时,陈省身任编辑委员。1946 年 4 月,陈省身回国。他抵达上海后,中央研究院便立即邀请他与姜立夫教授一起参加组建数学研究所。研究所开始设在上海,后迁至南京。陈省身认为办好研究所最有效的途径是从把研究所办成研究生院那样的研究机构开始。因此,他邀集了一批刚刚大学毕业的学生,亲自执教,给他们讲授代数拓扑,有时一星期上课多达 12 小时,这批才华横溢的年轻人后来不少都成了有名的数学家。1948 年秋天,他再次接受 O. 维布伦和 C. H. H. 外尔的邀请前往普林斯顿高等研究所。1949 年 7 月至 1960 年,他任芝加哥大学教授。1960 年被聘为加州大学伯克利分校教授。1981 年他是伯克利数学科学研究所(MSRI)的首任所长。

在将近半个世纪的时间里,陈省身在射影微分几何、欧氏微分几何、几何结构与它们的内蕴联络、积分几何、示性类、全纯映射、极小子流形、网等方面,取得了一系列丰硕的成果,其中最突出的有:(1)关于卡勒 G 结构的同调和形式的分解定理;(2)欧几里得空间中闭子流形的全曲率和紧嵌入的理论;(3)满足几何条件的子流形惟一性定理;(4)积分几何学中的运动公式;(5)他同 P. 格里菲思(Griffiths)的工作使网几何获得新生命,近年又有重大发展(例如,I. M. 盖尔范德(Geifand)、R. 麦克弗森(Mcphersan)的工

作);(6)他同J. K. 莫泽(Moser)关于 *CR* 流形的工作是最近多复变函数论进展的基础;(7)他同J. 西蒙斯(Simons)的特征式是量子力学异常(anomaly)现象的基本数学工具;(8)他同J. 沃尔夫森(Wolfson)关于调和映射的工作是整体微分几何的一个基本问题,在理论物理中有重要应用。在芝加哥大学,他培养出美国历史上第一批高水平的几何博士。他和陈维桓合著的《微分几何讲义》荣获我国(1976—1985年)优秀教材国家特等奖。1950年、1958年和1970年,他曾三度被邀请在国际数学家大会上报告微分几何的进展,这至少意味着在长达20多年的时间里,他在微分几何这个领域的研究一直处于世界领先地位。陈省身在当今数坛的地位极高,国际上一些权威学者评论道:"陈省身早期关于积分几何,特别是关于运动公式的研究,以及关于示性类的发现,是使得整体微分几何进入激动人心的发展阶段的转折点。他的领导、他的研究成果和他的众多学生,繁荣了整体微分几何,而整体微分几何又影响了拓扑、代数几何、复流形、数学物理规范场理论的发展。""陈省身是20世纪最伟大的几何学家,E. 嘉当的当之无愧的继承人。""陈省身先生就是现代的微分几何。""他开辟了微分几何的新纪元。"1983年,著名物理学家杨振宁教授在香港《70年代》月刊上发表了一首脍炙人口的"数理联姻"的几何学史诗《赞陈氏级》:

天衣岂无缝,匠心剪接成。
浑然归一体,广邃妙绝伦。
造化爱几何,四力纤维能。
千古寸心事,欧高黎嘉陈。

赞誉陈省身今天在几何学界的地位已直追欧几里得、C. F. 高斯、G. F. B. 黎曼、E. 嘉当。

世界著名的斯普林格(Springer)出版社1978—1989年陆续出版了陈省身的四卷选集,该选集的论文由作者亲自选定,其中三篇评介文章使读者对该选集及其背景了解尤深。第一篇由A. 韦伊撰写,第二篇由P. 格里菲思执笔,描述了陈省身的生平与工作

的各个方面。陈省身则在以"我的科学生涯与著作梗概"为题的文章中发表了他本人的某些见解。著名数学家丘成桐对陈省身选集的出版发表了如下评论："出版这部当代最卓越的几何学家的选集，是斯普林格出版社的一大贡献，本书当出现在每一位严肃的几何学家的书架上。"[73]

陈省身不仅在数学研究上做出了卓越的贡献，而且培养出了许多人才，可谓桃李满天下。其中有：他在西南联大的学生、诺贝尔奖获得者杨振宁，他在南京组建数学研究所时的成员、现中国科学院院士、国家自然科学奖一等奖获得者吴文俊、廖山涛，1983 年菲尔兹奖获得者丘成桐等等。

陈省身对数学发表了不少极深刻的见解，他说："在现代社会中，因为科学技术的进展，社会组织的日趋复杂，数学便成为整个教育的一个重要组成部分。"[41]"数学是一个广泛而复杂的学问，自然要吸收各方面的知识和观点，但更要紧的是要有个人的风格。数学的研究与其他科学相比，有一个显著不同的地方：它是向多方面发展的。当今的物理科学和生物科学往往有几个主题。但数学的研究方向可随个人自由选择，所以工作不必集中于几个大的中心，研究人员可较分散。一个有能力有决心的人，可以随不同的途径，完成他的志愿。20 世纪是数学的一个黄金时代。"[38]"两千年的数学发展是连续的，这个现象当可继续。不过，21 世纪的数学将是一个新的天地。世变不可知。可引以自慰的是数学是一个坚固的结构。我想有人类就有数学！"[38]

陈省身极为关心祖国数学事业的发展，炎黄子孙的爱国之心溢于他的言谈、书信、文章和行动之中。他说："要使中国数学突进……第一，要培养一支年轻的队伍，成员要有抱负，有信心，有牺牲精神，不求个人名誉和利益，要超过前人，青出于蓝，后胜于前。第二，要有国家的支持。"[41]他积极倡导和组织了中国数学界每年举行的三项活动：(1)国际微分几何、微分方程会议；(2)暑期数学研究生教学中心；(3)选派中国数学研究生赴美参加"陈省身项目"的

研读。在不少公开场合他充满自信地说:“中国人是有数学天才的。”[37]“中国数学的发展已具有充分的条件,……愿中国的青年和未来的数学家放大眼光展开壮志,把中国建为数学大国。”[38]“我相信数学有一个黄金时代,其中将有多数的中国数学家参加。”[94]

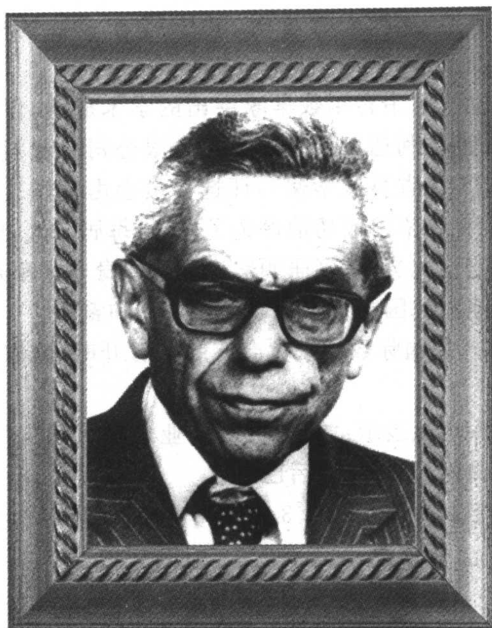
为了奖励我国中青年数学家突出的学术成就,促进我国数学的发展,由香港亿利达工业发展集团有限公司总裁刘永龄先生捐助资金设立了“陈省身数学奖”,评选委员会由我国著名数学家组成。自1985年以来已成功地评选了九届,每届2人,现已有18名中青年数学家获此奖,有多届颁奖大会陈省身先生都亲临颁奖,这充分体现了他对我国中青年数学家的关怀和希望。

2002年8月国际数学家大会在北京召开时,陈省身被推举为名誉主席。

陈省身深情地表示:“我的最后事业也在祖国”,“我要为中国数学的发展鞠躬尽瘁,死而后已”。

陈省身于2004年12月3日在天津逝世,终年93岁。

P. 爱尔特希
(Erdös,Paul)



“P. 爱尔特希必定是世界上最多产的,然而或许又是最怪僻的数学家。”[43]

——P. 霍夫曼(Hoffman,美国数学家)

“数学是无限广大的。数本身是无穷的。这就是数学何以真的成了我惟一的兴趣所在的原因。”[42]

——P. 爱尔特希

P. 爱尔特希是匈牙利数学家,1913 年 3 月 26 日生于匈牙利布达佩斯。他是匈牙利科学院院士,是该院数学研究所研究教授。他还是美国、印度、英国等国的国家科学院外籍院士,并接受了许多名誉学位。

由于他在数论、组合论、概率论、集合论等领域的许多贡献,1984 年荣获沃尔夫数学奖,时年 71 岁。

P. 爱尔特希是犹太人,他的父母都是数学教师,自幼给予他很好的数学启蒙。P. 爱尔特希是一个数学奇才,3 岁时已能心算 3 位数的乘法,4 岁时就懂得负数,他回忆道:“当时我告诉母亲,如果你从 100 中取出 250,就得到—150。”P. 爱尔特希从 13 岁起,就成为一份适合于中学生的一流匈牙利杂志 KöMaL 的忠实解题者,每年年底,在该杂志刊登的最成功学生的相片之中,总有他的身影。P. 爱尔特希 17 岁进入布达佩斯大学学习,在大学一年级时,他就给出了在任何一个(大于 1 的)整数与它的两倍数之间必定存在素数(切比雪夫定理)的一个简单证明,从而轰动了匈牙利数学界,这条消息被编成小曲不胫而走,他还收到邀请参加由英国著名数学家 L. 莫德尔(Mordell)领导的一个引人注目的数学家小组。4 年后他以优异的成绩毕业,并获得数学博士学位。1934 年 10 月他前往英国曼彻斯特从事为期 4 年的博士后研究。此后,他从来没有固定的职位,没有妻小,也不定居在一个地方,而以疯狂的节奏,对美妙的数学问题和新奇的数学技巧处于永无止境的追求之中,奔波于一个又一个的大学或研究中心,不断与各国数学家研讨各种数学问题。20 世纪 30 年代他在欧洲游历,第二次世界大战期间在美国度过,战后则在全世界游历。他的行动方式是:登上一个受人尊崇的数学家的大门,宣布“我的大脑打开着”,接着就和东道主一起研讨几天,直到他自己厌烦了或主人精疲力尽了,方才转移到另一个地方去;他手里总有为数众多性质各异的问题,有时同几个同行呆在一间屋子里,与他们中的每个人研究各种不同的问题,直到问题解决或至少已有了眉目,方才罢休,每次这样的

造访、研讨,都是一次成功的合作,诞生一篇甚至一批学术论文。他的座右铭是:“另一个屋顶,另一个证明。”他还经常利用电话与别人讨论数学问题,他打电话通常不讲究社交礼节,而是单刀直入地谈正题。他把生活中的分分秒秒最大限度地挤出来从事数学研究。他是当代最多产的数学家,迄今已撰写或与他人合作撰写了大约1 500篇论文,而且每篇论文至少包括一个值得注意的新结果,其中有不少具有里程碑式的意义。多数上了年纪的数学家如果他们还很强健的话,会成为某种理论的缔造者,他们不再去解决问题,而只是提出数学研究的泛泛大纲,点出年轻人应当从事的新领域或被忽视的领域。P. 爱尔特希与他们不同的是:只要问题未被攻破,他就会在战壕里顽强地与青年数学家并肩战斗。他年逾70之后创造性仍生机勃勃。在1986年73岁时,他还发表了50多篇论文,超过了不少优秀数学家一生发表的论文数。跟他合写论文的作者多达450人以上,比历史上任何一位数学家的合作者都多。大家称这450多位幸运者具有“爱尔特希数1”,这是数学界中表示与这位大师合写论文者一个令人垂涎的代码;如果你的爱尔特希数为2,就意味着你和爱尔特希数为1的人共同合写过论文;同样可以“定义”爱尔特希数3、爱尔特希数4,……这是数学文献中的一道有趣的风景线。著名科学家爱因斯坦的爱尔特希数是2。到1987年,爱尔特希数已达到了7。P. 爱尔特希善于通过邮件与很多数学伙伴联系,仅1986年他就发出了约1 500封信,这些信几乎全都是三句话不离数学本行,一封典型的信是这样开头的:“我在澳大利亚,明天去匈牙利。设K是整数……”他研究的领域涉及数论、集合论、组合数学、数理逻辑、概率论及其应用等,并留下了许多光辉的篇章。例如,在堆垒数论中,1936年他得到:设A的密率为α,B的密率为0,如果B是N的有限位的基,则$A+B$的密率比α大。对于孪生素数,他于1940年证明了:存在无穷多个自然数n,使得$P_{n+1}-P_n<\gamma \lg P_n$,其中$P_n$为第$n$个素数,$\gamma$是欧拉常数。在数论函数中,1940年,他利用中心极限定理

和布伦筛法得到：若用 $A(x;\alpha,\beta)$ 表示不超过 x 且满足 $\lg\lg n+\alpha\sqrt{\lg\lg n}<f(n)<\lg\lg n+\beta\sqrt{\lg\lg n}$ 的 n 的个数，则当数论函数 $f(n)=\omega(n)=\sum\limits_{p|n}1$ 时，有：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x;\alpha,\beta)}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$$

对于整数分拆，他于 1942 年用初等的函数论方法估计出正整数 n 的所有不同分拆(将正整数 n 以几个正数之和的形式来表示，称为 n 的一种分拆)数的个数 $p(n)$ 为：

$$\frac{\exp(\pi\sqrt{2n/3})}{4\sqrt{3}n}\left(1+O\left(\frac{\lg n}{n^{1/4}}\right)\right)$$

他还提出一个假设：如果 n 个等差数列没有覆盖住自然数列，那么必存在 $0<x<2^n$，使 x 不属于上述任何一个等差数列。

1949 年，他用初等方法(不用 ζ 函数，且除了极限、e^x 和 $\ln x$ 的性质外，也没有用其他更高深的分析知识)证明了著名的素数定理：

对于相当大的整数 N，小于 N 的素数的个数为 $\pi(N)$，当 $N\to\infty$ 时大约为 $\frac{N}{\ln N}$，即：

$$\pi(N)\sim\frac{N}{\ln N}(N\to\infty)\text{ 或}\lim_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{\frac{N}{\ln N}}=1$$

他的这个证明轰动了数学界。

P. 爱尔特希与 M. 卡茨(Kac)等人建立了概率数论，发展了图兰方法，并证明了如下的中心极限定理：命 $f(n)$ 为适合 $|f(p)|\leqslant 1$ 的强加性函数(所谓强加性函数，即当 $(m,n)=1$ 时，$f(m,n)=f(m)+f(n)$，且 $f(p^k)=f(p)(k=1,2,\cdots)$)。又命 $A(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}\frac{f(p)}{p}$，$B(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}\left(\frac{f(p)^2}{p}\right)^{1/2}$。假定 $B(x)\to\infty$(当 $x\to\infty$ 时)，则

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} N_x(n: \frac{f(n)-A(x)}{B(x)} \leqslant z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$$

此定理称为爱尔特希-卡茨定理。

在概率论中还有不少以他的姓氏命名的定理,例如,钟开莱-爱尔特希定理就是有名定理之一。

在图论中,P. 爱尔特希发展了极图理论。他还论述了关于图及一般 K—图,斯坦纳三重系的极问题的有关结果与猜想。

P. 爱尔特希对组合数学很有建树。组合数学又称组合学,是数学的一个分支,它是研究"安排"的一门学科。当把已给的有限个或可数无限个物体按一定规则来安排时,自然会产生以下四个问题:符合要求的安排是否存在?这些安排有多少种?怎样做出这些安排?当有衡量这些安排优劣的标准时,怎样求出最优安排?这四个问题依次称为存在问题、计数问题、构造问题、优化问题。G. W. 莱布尼茨于 1666 年首次在近代数学的意义下使用"组合"一词,这是在他的著作《论组合的艺术》中出现的。自 17 世纪至 20 世纪 30 年代,组合数学受到娱乐、数论、概率论和化学等方面的推动而迅速发展,得到了一般的存在性定理和计算原理。有关存在性的一个重要结果是拉姆齐定理(它是抽屉原理的推广)。而 P. 爱尔特希业已开拓的领域之一就是组合数学里颇具哲理的拉姆齐理论,在 50 多年前他就已证明了拉姆齐数的存在,并对拉姆齐数下界做出了估值。另外,在 20 世纪 60 年代初期,P. 爱尔特希和我国著名数学家柯召以及英国著名数学家拉多(Rado)合作,得到下述重要定理:设 S 是一个有限集,$|S|=n$,$A_i \subset S$,$|A_i| \leqslant k$,$n \geqslant 2k$,$A_i \not\supset A_j$,$|A_i \cap A_j| \neq 0$,$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant f(n,k)$,则 $f(n,k) \leqslant \binom{n-1}{k-1}$,而且如果所有的 A_i 之间有一个公共元,则 $f(n,k) = \binom{n-1}{k-1}$。这就是著名的爱尔特希-柯-拉多定理。这个定理是组合数学中一个主要结果,它开辟了极值集论迅速发展的道路。由

于 P. 爱尔特希在匈牙利积极倡导离散数学，从而使匈牙利的离散数学发展很快，并在国际上有很高的声誉。它输出多位组合学家，都在美国第一流的数学系工作。

P. 爱尔特希的代表作有《数论的一些新进展和当前的问题》及《组合分析中的概率方法》等。P. 爱尔特希的数论文章，曾于1951 年荣获美国数学会颁发的科尔数论奖，1958 年他荣获匈牙利科学院的 Kossuth 奖。

L. 邦科夫(Bonkoff)(一位业余数学家，曾与 P. 爱尔特希合作发表过论文)说："P. 爱尔特希琢磨的东西太深，许多第一流的杂志都觉得很难处理他脑瓜儿里转出来的那些东西。"[42] 华盛顿大学系统科学与数学系主任 E. Y. 罗丁(Rodin)说："P. 爱尔特希是纯数学家，要多纯有多纯。他的工作完全不考虑使用，但他的成果和理论已开始为人应用。要是没有他的理论，今天正在做的一些事情就做不了。他在数论和因子分解方面的成果激起了人们极大的兴趣。"[42] 戈龙贝(Golomb)说："他的证明总是很漂亮。使用的技巧常常比别人的更好、更高超。"[42] 例如，前面我们曾提到，他 17 岁时证明的切比雪夫定理，P. L. 切比雪夫(Chebyschev)1850 年曾用很繁冗的方法给出了一个证明，其方法犹如用一台蒸汽挖掘机去移植一株玫瑰树。爱尔特希的证明巧妙得多，它犹如用一把小铁锹就移植了这株玫瑰树。他对素数定理的证明也是如此。

P. 爱尔特希讲学所得酬金和发表论著的稿酬，使他非常富有，但他的生活却极为简朴。为了更好地静思数学，他对自己实行禁欲，并抛弃了物质的享受和占有，他从不在女人、艺术、小说或电影等上花时间。从 20 世纪 40 年代起，他没有看过一本小说，还是 30 年前看过一场电影。他一直未结婚。他说："私人的财产是累赘，毫无思想。"因此，他把财产都用于科学、教育事业。从 1954 年起，他不断公布他不能解决的问题，每个问题的解决都付给报酬，以促进数学的发展。酬金总数约为 10 000 美元，按照他对问题难度的判断，酬劳从 10 美元到 3 000 美元不等。当他获得 50 000 万

美元沃尔夫数学奖金时,即把其中绝大部分以其父母的名义捐赠给以色列作为奖学金,他自己仅留下了750美元。在印度两次讲学所得的酬金,他分文未取,而全送给了一个素昧平生的妇女,一位32岁死于肺病的传奇式数学家S. A. 拉马努金(Ramanujan)的遗孀。他还在世界各地选购了1 000美元的书籍,送给匈牙利的青年数学家。他为匈牙利和以色列的学生都设立了奖学金。

P. 爱尔特希的生存就是为了献身于一个单纯的使命——揭示数学真理,并且为之兴趣盎然、呕心沥血。P. 爱尔特希认为:"数学从纯理论角度看是有序而美好的,这种秩序超越了物质世界。"[43]"从某种程度上,数学乃是人类从事的惟一一种永恒的活动。可以想像人类最终能认识物理学或生物学的一切,但是人类永远不能发现数学的一切,因为数学是无限广大的。数本身是无穷的。这就是数学何以真的成了我惟一的兴趣所在的原因。"[43]他心目中的数学是科学和艺术的光辉结合。在数学上,P. 爱尔特希具有强烈的好奇心。他在数学上的成功部分地归于他乐于对基本问题进行探究,思考其他人已确信无疑的东西。谈到他的工作方式,P. 爱尔特希说:"必须敞开你的大脑,一旦有了想法,你必须有能力抛弃一切,而全神贯注于这一想法。有的人只有当悄悄地回到自己的屋里才能工作。我只要拿张纸,坐下,就能思考。你在飞机上可以很好地思考问题,睡前也可以。"[42]他平均每晚只睡5个小时,甚至更少。每当别人劝他慢点儿干、注意休息时,他的标准回答是:"在坟墓里有的是时间去休息。"

是什么促使他这样生活?P. 爱尔特希说:"这就好像问巴赫作曲有什么快乐,也许你突然发现了隐藏的秘密,发现了美。"[42]贝尔实验室的R. 格雷厄姆(Graham)解释说:"P. 爱尔特希追求知识,追求理解。确实有一股力量推着他去多解答一个问题,多攀越一道山梁。"[42]

P. 霍夫曼说:"P. 爱尔特希是世界上最多产的,然而或许又是最怪僻的数学家。"[43]邦科夫说:"不敢说他是当今世界上最伟

大的数学家,但他是最接近这一荣耀的人。"[42] L. 登巴特(Dembart)称赞道:"在数的天地里,他首屈一指。"[42]

P. 爱尔特希在英国曼彻斯特作博士后时,与我国著名数学家柯召结下了深厚的友谊(1935—1938 年柯召正在那里留学),并合作发表了多篇重要论文。1961 年,他又与柯召教授合作共同完成了《对于一组有限集相交定理》的论文。该论文后又经英国著名数学家拉多参加意见,在牛津《数学季刊》上发表。该论文中给出了前述的著名的爱尔特希-柯-拉多定理。

P. 爱尔特希曾于 20 世纪 60 年代初期和 80 年代中期两次来我国进行学术访问,并在中国科学院数学研究所作过数论方面的学术报告。1990 年四川大学为庆祝柯召教授 80 寿辰暨执教 60 周年,《四川大学学报》出了一本专辑,P. 爱尔特希热情地写了一篇题目为《初等数论中某些问题与成果——祝我的朋友和合作者柯召 80 寿辰》的论文发表在该专辑上。柯召教授对笔者说:"P. 爱尔特希对中国很友好,他对我国或在我国出生的许多数学家,如陈省身、华罗庚、王元等都甚熟悉,很有好感。"柯召教授还说:"P. 爱尔特希对数学的执著追求,达到了如痴如醉的境界,他总想将世界上的事物都与数学联系,例如,他把小孩叫做 ε,如果某数学家停止了数学工作,他就说此人已经'死了'。P. 爱尔特希是一位将全部身心都献给了数学的博大精深、传奇式的杰出数学家。"

P. 爱尔特希于 1996 年 9 月 20 日在华沙参加一个学术会议时,因心脏病突发而溘然逝世,终年 83 岁。

小平邦彦
(Kodaira Kunihiko)



“使复流形理论急速发展,其中心原动力总是小平先生。……《小平邦彦全集》中……记录了 20 世纪复流形进展的本质。这是把小平先生称为流形论之严父的原因。”[134]

——饭高茂

“要理解数学,不靠数觉便一事无成。没有数觉的人不懂数学,就像五音不全的人不懂音乐一样。”[51]

—小平邦彦

小平邦彦是日本数学家,1915 年 3 月 16 日生于日本东京。由于他对复流形、代数几何学做出的杰出贡献,1985 年荣获沃尔夫数学奖,时年 70 岁。他 1954 年还荣获菲尔兹奖。

小平邦彦自幼就对数学有着浓厚的兴趣,在中学学习平面几何时,他对那些需要做辅助线来证明的问题尤为着迷,以至于老师称赞他是"辅助线的爱好者"。从中学三年级起,他花了半年时间,就把中学的数学课程全部自修完毕。小平邦彦于 1932 年考入第一高等学校理科学习。1935 年考入东京帝国大学理学院数学系学习,1938 年毕业后,又到物理系学习了三年,1941 年毕业。1941 年任东京文理科大学副教授,1944 年任东京大学副教授。1949 年获理学博士学位,同年赴美国普林斯顿高等研究所工作,1955 年任普林斯顿大学教授。此后,历任约翰斯·霍普金斯大学、哈佛大学、斯坦福大学教授。1967 年当选为日本学士院会员。1967 年回到日本任东京大学教授。1975 年任学习院大学教授。他还是美国国家科学院和格丁根科学院外籍院士。

小平邦彦在大学二年级时,就写了一篇关于抽象代数学方面的论文,大学三年级时他醉心于拓扑学,不久又写出了拓扑学方面的论文。1938 年他开始到物理系学习,帝国大学物理系的数学色彩很浓,主要是搞数学物理学研究,这对他来说真是如鱼得水。他在读了 J. 冯·诺依曼(von Neumann)的《量子力学的数学基础》、B. L. 范德瓦尔登(van der Waerden)的《群论和量子力学》以及 C. H. H. 外尔(Weyl)的《空间、时间与物质》等书后,深刻认识到数学和物理学之间的密切联系。当时日本正出现研究泛函分析的热潮,小平邦彦也积极参加到这一门学科的研究中去,他在 1937—1940 年的大学学习期间,共写了 8 篇高质量的数学论文。

大学毕业后,小平邦彦留校工作。当时正值战争年代,东京开始疏散,他也搬到乡下,在十分艰苦的条件下,独立完成了 3 篇关于调和积分的论文,其中一篇对多变量正则函数和调和性质的关系给出了极好的结果。著名数学家 C. H. H. 外尔看到后大加赞

赏，并于 1949 年邀请他到美国普林斯顿高等研究所工作。在 C. H. H. 外尔等人的鼓励下，小平邦彦以只争朝夕的精神，刻苦努力地研究，用 5 年时间发表了 20 多篇高水平的论文，获得了许多重要结果。其中引人注目的结果之一，是他将古典的单变量代数函数论的中心结果和代数几何的一条中心定理——黎曼-罗赫定理，由曲线推广到曲面。黎曼-罗赫定理是黎曼曲面理论的基本定理，概括地说，它是研究在闭黎曼曲面上有多少线性无关的亚纯函数(在给定的零点和极点上，其重数满足一定条件)。所谓闭黎曼曲面，就是紧的一维复流形。在拓扑上，它相当于球面上连接了若干个柄。柄的个数 g 是曲面的拓扑不变量，称为亏格。黎曼-罗赫定理可以表述为，对任意给定的除子 D，在闭黎曼曲面 M 上存在多少个线性无关的亚纯函数 f，使 f 的除子 (f) 满足 $(f)\geqslant D$？如果把这样的线性无关的亚纯函数的个数记作 $l(D)$，同时记 $i(D)$ 为 M 上线性无关的亚纯微分 ω 的个数，它们满足 $(\omega)-D\leqslant 0$，那么，黎曼-罗赫定理就可表示为：

$$l(D)-i(D)=d(D)-g+1$$

$d(D)=\sum n_i$ 称为除子的阶数。由于这一定理具有将复结构与拓扑结构沟通起来的深刻性，如何将其推广到高维的紧复流形自然成为数学家们长期追求的目标。小平邦彦经过潜心研究，用调和积分理论将黎曼-罗赫定理由曲线推广到曲面。不久，德国数学家 F. E. P. 希策布鲁赫(Hirzebruch)又用层的语言和拓扑成果把它成功地推广到高维复流形上。

小平邦彦对复流形进行了卓有成效的研究。复流形是这样的拓扑空间，其每点的局部可看做和 C^n 中的开集相同。几何上最常见而又相对简单的复流形是卡勒(Kähler)流形。紧卡勒流形的几何和拓扑性质一直是数学家们关注的一个重要问题，特别是利用它的几何性质(由曲率表征)来获取其拓扑信息(由同调群表征)。小平邦彦经过深入研究得到了这方面的基本结果，即所谓的小平消灭定理。例如，其中一个典型结果是，对紧卡勒流形 M，如果其

卡勒度量下的里奇曲率为正，则对任何正整数 q，都有 $H^{(0,q)}(M,C)=0$，这里 $H^{(0,q)}(M,C)$是 M 上取值于$(0,q)$形式芽层的上同调群。另外，小平邦彦还得到了所谓小平嵌入定理：即紧复流形如果具有一个正线丛，那么它就可以嵌入复射影空间而成为代数流形，即由有限个多项式零点所组成。小平嵌入定理是关于紧复流形的一个重要结果。

由于小平邦彦的上述出色成就，1954 年他荣获了菲尔兹奖。在颁奖大会上，C. H. H. 外尔对小平邦彦和另一位获奖者 J. P. 塞尔(Serre)给予了高度评价，他说："他们所达到的高度是自己未曾梦想到的。"[85]"我从未见过这样的明星在数学天空中灿烂地升起。"[85]"数学界为你们所做的工作感到骄傲，它表明数学这棵长满节瘤的老树仍然充满着勃勃生机。你们是怎样开始的，就怎样继续吧！"[85]

获得菲尔兹奖后，小平邦彦再接再厉，朝着数学的高峰继续攀登，随后又开拓了两个重要领域。1956 年以后，他和另几位数学家一起，把黎曼的模数理论推广到高维复结构的变形理论。后来他又把这些结果推广到一类复可逆的连续伪群所定义的结构变形理论上，从而建立了一套系统的复结构变形理论。他的这套理论，对代数几何、复解析几何、理论物理都有重要意义。20 世纪 60 年代，他转向研究紧复解析曲面的结构及分类，在历史上 G. F. B. 黎曼(Riemann)曾对代数曲线进行过分类，以后意大利数学家对代数曲面进行过研究，但其论证不太严格。小平邦彦的过人之处在于他把问题归结为极小曲面的分类，先用一个不变量(现称为小平维数)把曲面分成有理曲面、椭圆曲面、K_3 曲面等等，然后再细致分类。对每一种曲面，都建立一个"极小模型"，而同类曲面都能由极小曲面经过重复应用二次变换而得到。这样，他彻底弄清了椭圆曲面的分类和性质。1960 年，小平邦彦得出每个一维贝蒂数为偶数的曲面都是一个代数曲面的变形。1968 年，他又得到了当且仅当 S 不是直纹曲面时，S 具有极小模型。可以说，在代数曲面的

现代化过程中,小平邦彦是最有贡献的数学家之一。另外,对于解析纤维丛的分类只能是对于某些限定的空间,这一结论也是由小平邦彦等人得出的。小平邦彦这些成就,有力地推动了 20 世纪 60 年代以来代数几何学和复流形等分支的发展。在微分算子理论中,由小平邦彦和 E. C. 梯奇马希(Titchmarsh)给出了密度矩阵的具体公式而完成了外尔-斯通-小平-梯奇马希理论。

小平邦彦是第二次世界大战后日本数学界的杰出代表。1957 年他荣获了日本的文化勋章(这是日本表彰科学技术、文化艺术等方面的最高荣誉)。他的论文收集在 1975 年出版的《小平邦彦全集》(共 3 卷)中。这部西文论文集超过 1 600 页,其中包括二维卡勒流形场合的黎曼-罗赫定理的证明,对塞尔关于算术亏格的猜想的解决,解析层理论,上同调的消灭定理,小平-塞尔对偶性定理,霍奇流形是射影簇的证明,复结构的变形理论,复解析曲面的分类与结构理论,椭圆曲面的结构论,一般型曲面的结构论,高维奈旺林纳理论等等。其内容博大精深,记录了 20 世纪复流形进展的本质。为此数学家们将小平邦彦誉为“流形论之严父”。他的专著还有《现代数学引论》(1961 年)等。

小平邦彦晚年致力于教育事业,决定将自己的余生用来普及数学知识,培养青少年一代。他编写了许多大学和中学的数学教材,对日本的数学教育产生了重大的影响。其中一套由他主编的中学数学教材,已译成中文于 1979 年由吉林人民出版社出版。

小平邦彦对数学有不少精辟的见解。他认为:“数学乃是按照严密的逻辑而构成的清晰明确的学问。”[46] 他说:“数学被广泛应用于物理学、天文学等自然科学,简直起到了难以想像的作用,而且有许多情况说明,自然科学理论中需要的数学远在发现该理论以前,就由数学家预先准备好了,这是难以想像的现象。”[45]“看到数学在自然科学中起着如此难以想像的作用,自然想到在自然界的背后确确实实存在着数学现象的世界。物理学是研究自然现象的学问。同样,数学是研究数学现象的学问。”[46]“数学就是研究

自然现象中数学现象的科学。因此，理解数学就要'观察'数学现象。这里说的'观察'，不是用眼睛去看，而是根据某种感觉去体会。这种感觉虽然有些难以言传，但显然是不同于逻辑推理能力之类的纯粹感觉，我认为更接近于视觉，也可称之为直觉，为了强调是纯粹感觉，不妨称此感觉为'数觉'。……要理解数学，不靠数觉便一事无成。没有数觉的人不懂数学，就像五音不全的人不懂音乐一样。数学家自己并不觉得在证明定理时主要是具备了数觉，所以就认为是逻辑上作了严密的证明，实际并非如此，如果把证明全部用形式逻辑符号写下来看看就明白了。……谈及数学的sense(感受)，而作为数学 sense 基础的感觉，可以说就是数觉。数学家因为有敏锐的数觉，自己反倒不觉得了。"[51]

对于数学定理，小平邦彦认为："数学现象与物理现象同样是无可争辩地实际存在的，这明确表现在当数学家证明新定理时，不是说'发明了'定理，而是说'发现了'定理。我也证明过一些新定理，但绝不认为是自己想出来的，只不过感到偶尔被我发现了早就存在的定理。"[51]"数学的证明不只是证论，还有思考实验的意思。所谓理解证明，也不是确认论证中没有错误，而是自己尝试重新修改思考实验。理解也可以说是自身的体验。"[51]对于公理系他认为："现代数学的理论体系，一般是从公理系出发，依次证明定理。公理系仅仅是假定，只要不包含矛盾，怎么都行。数学家当然具有选取任何公理系的自由。但在实际上，公理系如果不能以丰富的理论体系为出发点，便毫无用处。公理系不仅是无矛盾的，而且必须是丰富的。考虑到这一点，公理系的选择自由是非常有限的。……发现丰富的公理系是极其困难的。"[51]

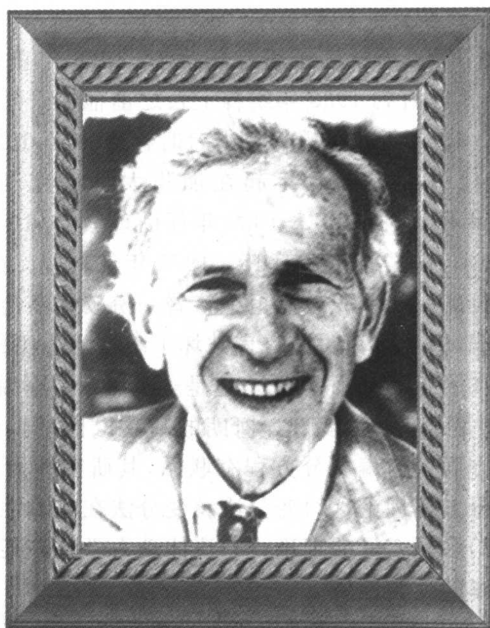
关于数学的本质，小平邦彦说："数学虽说是人类精神的自由创造物，但绝不是人们随意杜撰出来的，数学乃是研究和描述实际存在的数学现象，……数学是自然科学的背景。"[46]"为了研究数学现象，从开始起惟一明显的困难就是，首先必须对数学的主要领域有个全面的、大概的了解。……为此就得花费大量的时间。没

有能够写出数学的现代史，我想也是由于同样的理由。”[51]

荣获 1970 年菲尔兹奖的日本著名数学家广中平祐评论道：“具有超群才能的小平先生的一生，是一个朴实、谦虚的纯粹数学家的一生。”[135]

小平邦彦于 1997 年 7 月 26 日逝世，终年 82 岁。

H. 烈伟
(Lewy, Hans)



“H. 烈伟(关于偏微分方程)的例子激励了一大批数学工作者。……H. 烈伟的例子对偏微分方程的发展也是奠基性的。”[48]

——R. O. 韦尔斯(Wells, 美国数学家)

“在数学研究中需要很精细,因为希望往往在细节中。”[88]

“数学家不应满足一知半解,而要尽力发掘那些隐藏在表面现象之下的更深处的真理。”[88]

——H. 烈伟

H. 烈伟是德裔美国籍数学家,1904 年 10 月 20 日生于德国布雷斯劳。

由于他在偏微分方程中做出的重大贡献,1985 年荣获沃尔夫数学奖,时年 81 岁。

H. 烈伟 1922 年就读于哥廷根大学,1926 年获该校博士学位。从 1927 年起直到 1933 年纳粹上台之前他在哥廷根大学任无薪俸的讲师。1933 年在纳粹将要上台时移居美国,1933—1935 年在布朗大学任讲师。1935 年起在加州大学伯克利分校任教,1935—1937 年任讲师,1937—1939 年任助理教授,1940 年入美国籍,1939—1945 年任副教授,1945—1972 年任教授。在 1950 年他和伯克利分校的一些在职教授拒绝签署一份校董事会要求忠诚的誓言而被免职,但法院裁决该誓言破坏了教授的公民权利时,他又复职了。1972 年后任退休教授。他是美国国家科学院院士。

H. 烈伟是著名数学家 R. 柯朗的高足。他从事的数学研究工作在很多方面都与偏微分方程有联系,其研究涉及下列五个方面:(1)偏微分方程理论;(2)变分法及变分法在非线性偏微分方程中的应用;(3)多复变量的理论;(4)流体动力学;(5)某些类型的偏微分方程的解的反常性质。

H. 烈伟对偏微分方程做出了公认的经典性的杰出贡献。偏微分方程是 J. I. R. 达朗贝尔和 L. 欧拉在处理关于流体力学的物理问题时开始研究的。最初研究一般理论的是 J. L. 拉格朗日和 P. S. 拉普拉斯,其后在 18 至 19 世纪主要是 G. 蒙日(Monge)、A. M. 安培(Ampére)、J. F. 普法夫(Pfaff)、C. G. J. 雅可比(Jacobi)、A. L. 柯西、M. S. 李(Lie)等所进行的研究。在偏微分方程论中,由于同物理问题的密切联系,二阶线性方程从 18 世纪以来就成为研究的主流。椭圆型、双曲型和抛物型三个类型的分类,以及关于各个类型方程的边值问题、初值问题的解的研究,直到 19 世纪都是研究的主要对象。进入 20 世纪以来,伴随粘性流体与可压缩流体的研究而兴起的非线性问题,同超声速流体

的研究相联系的上述三个类型混杂在一起的混合型偏微分方程的研究等等，使得问题逐步复杂化了，尤其是采用近年发展起来的泛函分析方法，使得研究方法也有非常大的变化。

求偏微分方程近似解的通常方法是用有限差分方程取代这些偏微分方程，从而把问题化为代数计算。1925年，H. 烈伟的老师R. 柯朗却把这一方法调转头去用于证明椭圆型方程为拉普拉斯方程的解的存在性与惟一性。R. 柯朗通过在差分方程中取极限而达到目的，R. 柯朗建议他的学生H. 烈伟和K. 弗里德里希斯(Friedrichs)用这一方法考察双曲型和抛物型偏微分方程中的同类问题。1928年，H. 烈伟和K. 弗里德里希斯在双曲型及抛物型中得到了一个重要结果：除非在空间和时间的两个方向上，差分网格宽度适合某些限制，否则差分方程将不收敛。后来发现，这一结果有助于解释为什么当我们试图逼近例如波动方程的解时常会产生不可思议的假象，或者有不稳定性。虽然偏微分方程稳定性和收敛性的判别法常常并不相同，但R. 柯朗、K. 弗里德里希斯、H. 烈伟的这种判别法引导人们理解了有关问题及其解决的方法，因此是十分重要的，并被誉为柯朗-弗里德里希斯-烈伟判别法，以至到1967年，美国麻省理工学院贡献了它整整一期杂志，专门发表有关此判别法及其影响的文章。

20世纪的中叶，常微分方程的存在定理已有了相当广泛和深入的研究，但偏微分方程的解一直只限于几种特殊情形。20世纪50年代，L. 埃伦普里斯(Ehrenpreis)和B. 马格兰奇(Malgrange)第一次证明：每一个常系数线性偏微分方程是可解的；若右端是光滑的，则有光滑解，若右端是广义函数，则有广义函数解。但对变系数情形，情况将如何？1957年，H. 烈伟提出了一个光滑的线性偏微分方程无解的著名例子：即对一阶的变系数偏微分方程 $\frac{\partial u}{\partial x_1}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x_2}-2\mathrm{i}(x_1+\mathrm{i}x_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=g$，式中 u 是复值未知函数，不管 g 多么光滑都没有任何广义函数解。这个惊人的反例震动了数学

界,使数学家们认识到变系数偏微分方程的复杂性,从而也激发了数学家们进一步探索这类方程的奥秘。H. 烈伟所举的例子激励了一大批数学工作者,他的例子对偏微分方程的发展也可以说是奠基性的。H. 烈伟这一成就和后来 L. V. 赫尔曼德尔(Hörmander)在这方面的工作,被当代著名数学家 P. R. 哈尔莫斯(Halmos)等人在 1976 年列为美国四十年来数学方面的十大成就之一。H. 烈伟对椭圆型方程与方程组决定的自由边界问题也有见地。将自由边界与变分不等方程联系起来讨论是从 H. 烈伟开始的。他还研究了自由边界的摄动方法。H. 烈伟对解析函数进行了研究,但他主要是用解析函数理论作为他从事研究的主要工具。用微分方程把解析函数同它的可能开拓联系起来的思想也是属于 H. 烈伟的。众所周知,调和函数($\Delta u=0$ 的解)不论它的边界值如何,在存在域内都是解析的。D. 希尔伯特猜测:如果 $F(x,y,u,p,q,r,s,t)\left(p=\frac{\partial u}{\partial x},q=\frac{\partial u}{\partial y},r=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},s=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},t=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ 关于其变元是解析的,则椭圆型偏微分方程 $F=0$ 的任一解 $u(x,y)$ 在其存在域内是解析的(希尔伯特第 19 问题)。这个事实由 S. N. 伯恩斯坦及 T. 拉多(Radó)等人证明了,但 H. 烈伟由于把变量推广到复域,而把这个方程看做双曲型偏微分方程,因此大大简化了希尔伯特的猜测的证明。H. 烈伟指出,对于非线性方程之具有二阶赫尔德连续导数的所有解,对于变分问题之具有一阶赫尔德连续导数的所有解,都是其自变数的解析函数。另外,由于 H. 烈伟和其他一些数学家对椭圆型和双曲型偏微分方程数值解所做的分析,使人们透彻地掌握了关于跨音速流动的基本物理学原理。他还考虑过对于狄利克雷积分低维障碍问题,并得到解的光滑性的一些结果。

H. 烈伟在蒙日-安培方程(一种二阶偏微分方程)、流体力学、空腔理论、变分法等方面都有建树。

H. 烈伟的专著有《变分法》、《偏微分方程》、《微分几何与流

体力学》等。

H. 烈伟 1950 年被邀请在国际数学家大会上作报告。

H. 烈伟 1979 年荣获由美国数学会颁发的斯蒂尔奖，以表彰他的三篇奠基性论文：《关于三个变量的非线性微分方程的解的局部特征和两个复变量的解析函数相关定理》(1956 年)、《一个光滑的线性偏微分方程无解的例子》(1957 年)、《关于正则包》(1960 年)。

H. 烈伟对于数学及数学研究发表过一些很好的见解。例如，他曾说："在许多方面，分析比其他一些数学分支更接近于生活。"[38]"在数学的一些领域里陈述是很清晰的，前提是清晰的，结论是清晰的，问题的趋势也是相当清晰的，但分析并不是这样。按我个人的意见，将分析按这样的方式表述是违背它的主题的。如果条件是暂时的，结论也是暂时的，当你规定了严密的条件时，你就会人为地限制它的主题。"[88]他曾充满哲理地说："一个人在数学研究中需要很精细，因为希望往往在细节中。"[88]他在为 G. F. B. 黎曼的著作写的序言中写道："数学家不应满足于一知半解，而要尽力发掘那些隐藏在表面现象之下的更深处的真理。"[88]他说："数学好似一张黎曼面，在它的上面有寻常点和奇点，你必须着手研究奇点。"[88]

1948 年，H. 烈伟曾应他过去在哥廷根的同行，当时任成都理学院院长的魏时珍教授的邀请访问过成都。1982 年 4 月，H. 烈伟又应四川大学的邀请来我国访问了近一个月，这次他主要是在四川大学讲学，讲学的内容有：调和分析的有关问题、障碍问题及其反问题等等，并深情地拜访了四川大学的魏时珍教授。这次来中国，他还顺访了北京大学、北京师范大学、复旦大学、武汉大学等。

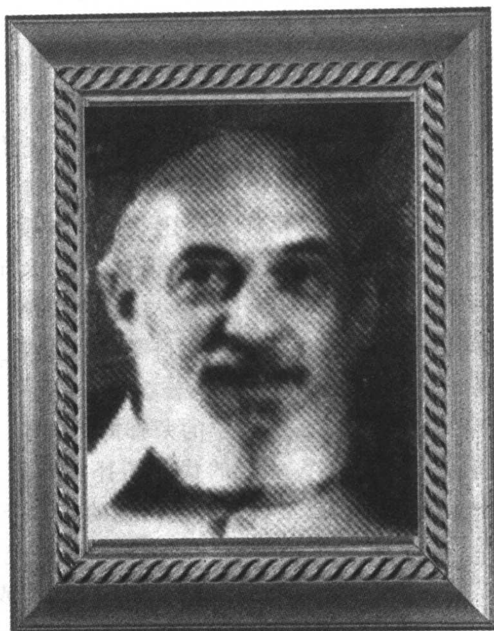
H. 烈伟很喜欢中国和中国人民。1980 年他赠送了一千多册杂志(包括 1940—1972 年间的全部 *Mathematical Reviews*)给四川大学图书馆(这是他请加州大学伯克利分校的项武义教授邮寄给四川大学的)。1982 年他离开成都时，把四川大学给他的讲课

酬金全部送给了四川大学数学系图书室，并诚挚地说：“现在中国还不富裕，这次讲课的全部酬金就赠送给图书室买图书吧！”

H. 烈伟 1982 年访问四川大学时，很兴奋地告诉负责接待他的唐志远教授说：“我有一个中文名字”，并拿出他的名片给唐志远教授看，这张名片一面是英文，一面是中文，中文的名字是烈伟。当唐志远告诉他烈伟这两个字的中文含义时，H. 烈伟显得十分高兴和得意。他还向唐志远讲述了 1948 年他访问成都时的有趣的故事，自此，H. 烈伟与唐志远结下了深厚的友谊。

H. 烈伟于 1988 年 8 月 23 日逝世，终年 83 岁。

S. 艾伦伯格
(Eilenberg, Samuel)



“S. 艾伦伯格是20世纪数学的伟大建筑师之一，并重塑了我们研究拓扑的方法。”[140]

——H. 嘉当(Cartan)等

“代数拓扑学的成就往往不是通过往前进、利用已有的方法于新的问题取得的，而常常是回过来，提炼新的、更细致的方法，这些方法对取得进一步结果是不可少的。”[53]

——S. 艾伦伯格

S. 艾伦伯格是波兰裔美国籍数学家，1913 年 9 月 30 日生于波兰华沙。

由于他对代数拓扑学和同调代数学做出的突出贡献，1986 年荣获沃尔夫数学奖，时年 73 岁。

S. 艾伦伯格 1930 年就读于华沙大学，1934 年获该校硕士学位，1936 年获博士学位。1939 年由于德国法西斯入侵波兰，他赴美国。最先在密执安大学任教，1940—1941 年任讲师，1941—1945 年任助理教授，1945—1946 年任副教授。1946—1947 年到印第安纳大学任教授。1947 年任哥伦比亚大学教授，他在该校数学系两次任系主任，并在该校工作直到退休。1948 年入美国籍。1950—1951 年及 1966—1967 年任巴黎大学访问教授。S. 艾伦伯格是美国国家科学院院士，美国艺术与科学研究院院士，曾任美国数学会副主席。他是伦敦数学会的荣誉会员，并获得哥伦比亚大学、宾夕法尼亚大学及其他多所大学的荣誉博士学位。

S. 艾伦伯格是当代极负盛名的代数拓扑学专家。代数拓扑学是拓扑学中主要依赖代数工具来解决问题的一个分支。同调与同伦的理论是代数拓扑学的两大支柱。同调论是研究与同调概念有关的课题，“同调”一词源出于希腊文，意指“和谐”或“一致”；同伦论是研究与连续映射的连续形变有关的各种课题。同调与同伦实质上是不同的概念，但对于同调与同伦之间关系进行深入探讨的结果促使同调代数迅速地向前发展起来。这一整套强有力的工具不仅对代数拓扑本身产生了巨大影响，也深深地渗透到其他数学分支，如代数、代数几何、泛函分析、微分方程、复分析等等。S. 艾伦伯格对代数拓扑学做出了重大贡献。他与 N. E. 斯廷罗德在 20 世纪 40 年代中期，倡导用公理法来引进同调群，把几个同调群的基本性质作为公理——现在称为艾伦伯格-斯廷罗德公理，包括同伦公理、正合性公理、切除公理、维数公理等，并对同调论进行了刻画，完成了同调论公理化，结束了战前多种同调论并存的混乱局面。从而，不仅使人们对古典的同调论看得更清楚，同时也为广义

同调论的兴起创造了条件。S. 艾伦伯格 1944 年定义了奇异(上)同调群。对于同调论公理,S. 艾伦伯格和 N. E. 斯廷罗德提出了同调群、上同调群满足的公理,并证明了在多面体的情形下满足公理的同调群、上同调群是惟一的。S. 艾伦伯格与 J. A. 迪尼多内(Dieudonné)于 20 世纪 50 年代初共同创立了同调代数。同调代数方法比原来的抽象代数方法更加强有力,它来源于代数拓扑学。代数拓扑学把几何对象对应于代数结构,而同调代数则把代数对象对应于代数结构,因此有利于深入研究代数结构以及其他有关的结构。由于应用了这种强有力的方法,群论、环论、代数论等方面都得到了许多过去无法得出的结果。利用同调代数理论,可以非常简洁地将整个类域论表现出来,并对非阿贝尔类域论的发展有所预示。S. 艾伦伯格与 N. E. 斯廷罗德 1952 年合著的《代数拓扑学基础》对代数拓扑学的传播、应用和进一步发展起了巨大推动作用。他们把代数拓扑学的基础精神概括为:把拓扑问题转化为代数问题,通过计算来求解。S. 艾伦伯格和 S. 麦克莱恩(MacLane)在 1942 年提出了"范畴"与"函子"的概念,并在 1945 年发表了系统的结果。范畴概念建立在数学结构的基础之上,比如群的范畴、环的范畴、拓扑空间的范畴、全序空间的范畴等等。范畴不仅是具有某种数学结构的集合的集合,它还要考虑这些集合之间保持结构的映射关系,也就是说,范畴是把集合和映射放在平等的、相互间有密切联系的地位上。函子则是范畴与范畴之间的映射,同样它不仅考虑集合,还要兼顾集合间的映射。从某种意义说,范畴与函子是集合与映射的上层建筑,它反映了不同结构之间的关系。由于范畴与函子越来越成为表述许多数学理论的方便语言,范畴与函子的应用价值逐渐提高,20 世纪 60 年代便出现了范畴论、范畴代数等分支,使范畴论成为非常形式化的数学体系。

S. 艾伦伯格对障碍理论做出了重要贡献。障碍理论的目的是用代数的方法来判定映射的可扩张性。同伦论中的布劳威尔映射定理、霍普夫扩张定理、分类定理等古典结果虽也可看做是障碍

理论的开端，但随着同伦群、上同调群概念的引进，S. 艾伦伯格首先于 1940 年系统地论述了障碍理论。1947 年他又引进了扩张的障碍的集合。他还与穆尔(Moore)共同提出了艾伦伯格-穆尔谱序列。

S. 艾伦伯格对自动机理论也颇有建树。

在现代数学中，以艾伦伯格的姓氏命名的有艾伦伯格-麦克莱恩复形、艾伦伯格-麦克莱恩空间以及复形上同调环、艾伦伯格-波斯特尼科夫不变量等。

S. 艾伦伯格是代数拓扑学方面的权威人物之一，他对代数拓扑学发表了不少言简意赅的见解。例如，他说："代数拓扑学的基本对象是研究拓扑空间和它们的连续映射。如果我们能知道全体拓扑空间，全体连续映射和它们之间的全部关系，那么我们的目的便达到了。但这个目的显然是不可能达到的，拓扑空间和连续映射都多而又多。因此，我们退一步而引进代数方法，即在代数较之拓扑易于掌握的这种设想之下，让拓扑空间和连续映射决定一些叫做拓扑不变量的代数对象。为了有效，这些不变量也须设想为是可以计算的。"[53] 他强调指出："代数拓扑学的成就往往不是通过往前进、利用已有的方法于新问题取得的，而常常是回过来，提炼新的、更细致的方法，这些方法对取得进一步结果是不可少的。这种发展的结果使得每隔十年，整个领域的面貌大变，而每个有一段时间不接触它的人，如果想再读文章的话，可能连名词都不懂。"[53] 他认为，在数学里新的数学工具"对取得新的结果是不可少的。"[53] 他还说："代数拓扑学中的一些概念，它们在数学的其他分支，如分析、代数、代数几何和微分几何中颇为有用。"[53] 所以法国著名数学家，布尔巴基学派的重要成员 J. A. 迪厄多内称誉"代数拓扑学和微分拓扑学是数学的女王。"

S. 艾伦伯格也是法国布尔巴基学派为数极少的外籍成员之一。布尔巴基学派原先的成员都是法国人。S. 艾伦伯格是一个性格外向、思维敏捷、易于接受新事物的人。他到美国六个月之

后,关于美国的事情,就比很多在美国出生的人知道的还要多(他首先做的一件事是坐便车长途旅行)。由于他的法语讲得像地道的法国人,而且比任何法国人都更多地知道代数拓扑,因此,布尔巴基学派的成员应为法国人这一不成文的规定,在接纳他时被打破了。

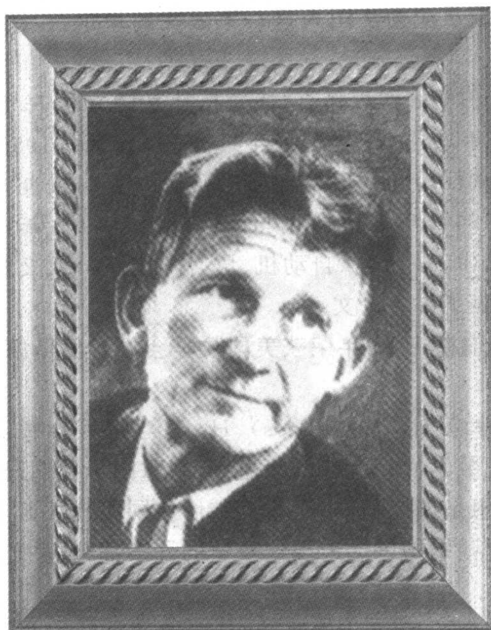
S. 艾伦伯格的代表作有《代数拓扑基础》(与 N. E. 斯廷罗德合著)(1952 年)、《同调代数》(与 H. 嘉当合著)(1956 年)、《阿贝尔群的上同调群与同伦论》、《群论 $H(\pi,n)$》(1954 年)、《空间的下同调运算》(1949 年)、《上同调与连续映射》(1940 年)、《自然等价的一般原理》(1954 年)、《自动机、语言与力学》(共 2 卷)等。他还在杂志上发表了许多论文。

S. 艾伦伯格 1987 年荣获美国数学会颁发的斯蒂尔奖中的终身成就奖。

著名数学家 H. 巴斯(Bass)、H. 嘉当等人称誉:“S. 艾伦伯格是 20 世纪数学的伟大建筑师之一,并重塑了我们研究拓扑的方法。这些思想是如此基本和适当,它们使同调代数诞生了,接着是范畴理论,这些结构渗透进现代数学的许多部分,呈现了它的生命力。[140]

S. 艾伦伯格 1998 年 1 月 30 日逝世,终年 84 岁。

A. 赛尔贝格
(Selberg, Atle)



“当代有名的数论大家 A. 赛尔贝格曾经说，他喜欢数学的一个动机，是以下的公式：$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$。这个公式实在美极了；单数 1,3,5,…这样的组合可以给出 π。对于一个数学家来说，此公式正如一幅美丽图画或风景。”[38]

——陈省身

“我认为对中学数学的内容一定要重新斟酌，应该增加一些涉及如何发现并令人振奋的内容。”[54]

——A. 赛尔贝格

A. 赛尔贝格是挪威裔美国籍数学家，1917 年 6 月 14 日生于挪威郎厄松。由于他对数论、调和分析、离散子群、自守函数等方面的杰出贡献，1986 年荣获沃尔夫数学奖，时年 69 岁。他还于 1950 年荣获菲尔兹奖。

A. 赛尔贝格的父亲和两个兄弟都是数学教授，由于受家庭环境的感染和熏陶，他自幼就喜欢数学。大约在 13 岁时，他开始自学高等数学，当他见到$\frac{\pi}{4}$的莱布尼茨级数$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$时，发现它是由奇数的倒数及加、减符号交错变化而构成时，他感到非常惊奇，更对数学心驰神往，决心要知道这个公式是怎样来的。当他还是一个中学生时，就已经自修了几年高等数学，所读的书都是从他父亲的书房中找到的。当他阅读了哥哥从大学图书馆借回的印度数学家 S. A. 拉马努金(Ramanujan)的全集之后，简直像是发现了新大陆，极大地唤起了他的想像力。在上大学之前，他就写了一篇论文，题目是《关于某些数论的等式》。后来他就读于奥斯陆大学，学习成绩优秀，毕业后留校攻读研究生。1943 年获博士学位。1942—1947 年任奥斯陆大学研究员，后被选为挪威科学院院士。1947 年移居美国，先在普林斯顿高等研究所任职，1948—1949 年任美国锡拉丘兹大学副教授，1949 年回到普林斯顿高等研究所任研究员，1951 年升为普林斯顿高等研究所的教授。他是美国艺术与科学学院院士。

A. 赛尔贝格是当代著名的数论大师。数论是研究数的规律，特别是研究整数性质的数学分支。它与几何学一样，既是最古老的数学分支，又是始终活跃着的数学研究领域。整数之间的一些简单而奇妙的关系，早在古代就被发现了，并使人们感到惊异。直角三角形三条边的边长关系式 $3^2+4^2=5^2$，就是一个著名例子。寻求具有同样关系的其他数的问题，成为毕达哥拉斯(Pythagoras)学派的研究对象。17 世纪，法国数学家 P. de 费马(Fermat)证明或提出了许多数论方面的命题，其中最有名的是“费马大定

理”。现代数论的统一理论发端于 1801 年 C. F. 高斯(Gauss)在 24 岁时完成的不朽之作——《算术研究》,确定了至今依然适用的有关这一课题的研究方向。18 世纪末,A. M. 勒让德(Legendre)出版了他的巨著《数论》,试图集数论成果之大成。数论这个名称就是从这本书名而来的。从方法上讲,数论可以分成初等数论、解析数论与代数数论等主要分支。数论中许多问题和结果的提法一般都非常简单,但证明却往往十分困难,常常需要广泛而深奥的数学工具。数论中的许多命题,吸引了不同时代的许多杰出的数学家去研究,像欧几里得(Euclid)、埃拉托色尼(Eratosthenes)、丢番图(Diophantus)、婆什迦罗(Bhāskara)、C. G. 巴歇(Bachet)、P. de 费马、L. 欧拉(Euler)、J. L. 拉格朗日、A. M. 勒让德、C. F. 高斯、A. L. 柯西(Cauchy)、G. F. B. 黎曼(Riemann)等数学大师,都热衷于数论命题的探索。C. F. 高斯就曾说:“数学是科学的皇后,数论是数学之王。”

A. 赛尔贝格勤于思考,才华横溢。他 1942 年的博士论文《论黎曼 ζ 函数的零点》便使他崭露头角。这篇长达 59 页的论文,研究了著名的“黎曼猜想”。G. F. B. 黎曼在 1859 年证明素数定理的论文《论不大于给定数的素数个数》中提出了著名的 ζ 函数:

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$$

其中复数 $s=a+ib$。黎曼猜想 $\zeta(s)$ 的零点除明显的外,都位于复平面中 $a=\frac{1}{2}$ 这条直线上。这个问题至今未能彻底解决。1914 年英国数学家 J. E. 利特尔伍德(Littlewood)、1936 年 E. C 梯奇马希(Titchmarsh)先后对高度为有限的带域进行了验证。1942 年,A. 赛尔贝格引入新的想法,证明了存在一个常数 A,使得 $N_0(T)\geqslant AT\ln T$。其结果是,相当大一部分零点落在临界线上。这大体相当于:$N_0(T)\geqslant A\cdot N(T)$[这里 $N(T)$ 是矩形$\{0<t<T,0\leqslant\sigma<1\}$中 $\zeta(s)$ 的零点个数,$N_0(T)$ 是线段$\{0<t<T,\sigma=\frac{1}{2}\}$上 $\zeta(s)$ 的

零点的个数]。A. 赛尔贝格虽然没有具体算出其中常数 A 的值，但用他的方法得出的 A 显然是非常小的，这离黎曼猜想所要求的 $A=1$ 还很远。虽然如此，他的结果仍被认为是研究黎曼猜想的重大进展，并得到了菲尔兹奖评奖委员会的高度评价。A. 赛尔贝格也因此声名鹊起。

19 世纪初，C. F. 高斯和 A. M. 勒让德根据大量具体的数字材料猜想：对于相当大的整数 N，小于 N 的素数的个数记为 $\pi(N)$，当 $N\to\infty$ 时 $\pi(N)$ 大约是 $\frac{N}{\ln N}$，即

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N}(N \to \infty) \text{ 或} \lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)}{\frac{N}{\ln N}} = 1$$

这就是素数定理，它揭开了素数的分布状况。但对于这个定理的证明，在近 50 年间毫无进展。一直到 1850 年，俄国数学家 P. L. 切比雪夫(Chebyschev)首开纪录，证明 $\pi(N)$ 满足不等式

$$a\frac{N}{\ln N}<\pi(N)<b\frac{N}{\ln N}$$

此处 $a=0.921\ 29$，$b=1.105\ 55$。1859 年，G. F. B. 黎曼发表《论小于给定数的素数个数》一文，但文章极其简略，证明疏漏很大。其后 30 多年间又有不少数学家力图证明 G. F. B. 黎曼论文中所表达的主要结果，但都徒劳无功。1896 年，法国数学家 J. 阿达玛(Hadamard)和比利时数学家 C. J. G. N. 瓦莱-普桑(Vallée-Poussin)分别独立地运用高深的解析工具即复变函数方法证明了素数定理。前者运用复变量的整函数理论，后者运用黎曼 ζ 函数。以后 N. 维纳(Wiener)又给出了一个复杂的新证明。将近一个世纪的努力使许多人怀疑这个定理是否能够用初等方法证明。1921 年，英国解析数论大师 G. H. 哈代(Hardy)在哥本哈根数学会发表讲演时就说过，虽然“断言一个定理肯定不能用某种方法证明是轻率的”，但是素数定理的初等证明照他看来是不可能的。“如果谁给出了素数定理的初等证明，那他就证明了(我们现在关于数

论、解析函数论中何谓深刻，何谓肤浅的）见解是错误的，……从而就到了该丢掉一些著作来重写理论的时候了。”就在 G. H. 哈代说这番话的 28 年以后，年仅 31 岁的 A. 赛尔贝格和另一位 35 岁的匈牙利数学家 P. 爱尔特希（Erdös）同时分别用初等方法证明了素数定理。他们两人都没有利用 ζ 函数，且除了极限、e^x 和 $\ln x$ 的性质外，也不需要其他高深的分析知识。他们两人的证明都用到了一个不等式——现在习称为赛尔伯格-爱尔特希不等式。他们这个证明轰动了世界数论界。

1950 年，在美国坎布里奇举行的国际数学家大会上，A. 赛尔贝格荣获菲尔兹奖。获奖后，他又在数论的许多分支上做出了重要贡献。1952 年他对布龙筛法作了改进。他的方法具有高度的技巧，由他改进后的筛法大大缩小了上、下界的界限。A. 赛尔贝格的工作大大加快了解决一系列棘手数论问题的速度。1956 年他发表了一篇重要论文《弱对称黎曼空间中的调和分析和不连续群及其对狄利克雷级数的应用》。在这篇论文中，他引入了弱对称黎曼空间，这是对称黎曼空间概念的一种推广；他还引进了重要的迹公式，推广了古典的泊松求和公式，可用来计算自守函数空间的维数以及赫克算子的迹等等。由于他的揭示，酉表示论与自守形式理论及数论发生了联系。关于代数数域的 ζ 函数和 L 函数，他也进行了研究。他定义了广义艾森斯坦级数，进而研究了它的解析性质及其函数方程。对于球函数，他得到了当 G 为李群时，球函数是 C^∞ 函数的结论。1960 年，在印度孟买召开的国际函数论会议上，他和 A. 韦伊（Weil）提出了“除去一个例外，格子群都是算术群”的猜想——现称为赛尔伯格猜想。这个猜想后来被苏联数学家 G. A. 马尔古利斯（Magulis）解决。从 20 世纪 60 年代起，A. 赛尔贝格的研究兴趣开始转向连续群的离散子群，这导向了非交换调和分析及朗兰兹纲领，又导向 A. 韦伊等人关于算术子群的研究以及与遍历理论有关的研究方向。A. 赛尔贝格的思想、工作、成果使人们能够将看来相距甚远的数学分支结合起来，像离散

群理论与自守形式理论、半单李群的表示，ζ函数理论与散射理论等等就是如此。

A. 赛尔贝格成就卓著，在 20 世纪的数学史上留下了不少以他的姓氏命名的数学名词。例如，赛尔伯格不等式、赛尔伯格等式、赛尔伯格渐近公式、赛尔伯格筛法、赛尔伯格 ζ函数、赛尔伯格猜想等等。

A. 赛尔贝格认为数学是一种最激动人心的智力活动。他曾感慨地说："我很同情非数学家，我觉得他们失去了一种最激动人心的、丰富的智力活动的回报。"[54] 他又说："人们常常将数学与艺术比较，特别是与音乐比较。确实，数学与音乐方面的才能都会在人们想像不到的幼年时期就焕发出光彩，然而音乐才能会比数学才能早得多地得到人们的承认。在数学中，美学的考虑，漂亮、简洁、别致等等是与其真理性一样重要的。如果我们将数学视为知识的实体，则它肯定会被确认为一门科学。但如果我们从其生长和积累的过程来看，则数学更像一种艺术。数学只关心人的心智所创造出来的对象和结构，尽管这些对象和结构可能反映了所谓现实世界中的事物或是它们的模型。"[54]

对于数学发展的特点，A. 赛尔贝格说："在其他自然科学中，当新东西出来时就把老东西抛弃了，在数学中则不然。古希腊的数学家，如欧几里得、阿基米德（Archimedes）和阿波罗尼奥斯（Apollonius），他们的东西今天仍然是正确的，尽管他们的工作是在 2000 多年以前做的。然而在内容和实质保持不变时，表达它们的形式却一直在变化着。从一代人到另一代人，表现数学面貌的东西发生着深刻的变化；甚至在较短的时间间隔内，它们就会发生根本性的变化。"[54]"数学可以通过多样化、复杂化和专门化等多种途径发展：如一个主题可以按互相分离的专门分支沿几个方向分叉；另一方面又可以交汇、综合、简化、统一，在一些看来相距较远又没有任何联系的不同数学领域之间，通过架桥铺路，最终使它们变得密切相关。"[54]"古希腊数学建立了点、线、面的概念以及它

们之间的关系。西方数学只是在意大利实现了数学的复兴后，才把自己建立在数的概念上并持续了几百年。今天，我们的数学主要关心的是结构以及结构间的关系，而不是数之间的关系。这种情况最初发生在1800年左右，在这个方向上的首次突破自然是抽象群的概念的引入，目前它在数学领域中无所不在。”[54]

关于数学才能，A. 赛尔贝格认为：“数学才能表现在许多方面，有一些数学家是理论的创立者，还有一些是解决问题的能手，另一些善于提炼出问题——我不是说他们创造问题，换言之，他们能够发现新的数学对象或关系中的孤立的例子，而这些新对象和关系以后将发展成内容丰富的理论。这些不同能力或天赋是无高低上下之分的。归根结底，为保持数学持续的繁荣，这些才能都是必要的。”[54]“数学家工作的巅峰通常出现在30岁到40岁之间。”他强调指出：“由于死板的体制，由于老师对那些少见的不平常的学生缺乏理解，而没有对他们实行特殊对待，最终，使天才无从发挥自己的能力。……要在各级教育系统中体谅那些不寻常的、可能在某个方向有特别天赋的孩子。”[54]

对于中学的数学教学，A. 赛尔贝格说：“我曾经跟很多已成为数学家的人谈起他们在中学所学的数学。他们中的大多数并未从中得到特别的鼓舞，而是自学自己偶然碰到的或以某种方式得到的数学。我自己就是一例。”[54]因此，“我认为对中学数学的内容一定要重新斟酌，应该增加一些涉及如何发现并令人振奋的内容。……除了中学的教学外，我认为……很重要的一件事是公共图书馆应藏有相当数量的数学书籍，以便鼓励那些希望在学校课程之外找到什么新东西的人，使他们产生兴趣。”[54]

1998年5月30日至6月15日，A. 赛尔贝格应北京大学的邀请来我国进行学术访问：6月2日在北京大学作了题为《素数定理过去一百年来的综述》的报告；其后又到山东参加了山东大学举办的第三届近代数论研讨班，并于6月8日在该研讨班上作了题为《关于L函数线性组合的临界线的零点》的报告；6月9日又在

该研讨班上作了题为《素数定理的初等证明的概述》的演讲，并深情地介绍了他的菲尔兹奖获奖工作；6 月 12 日又到西北大学以《我的数学生涯》为题作了演讲。6 月 14 日正逢 A. 赛尔贝格的 81 岁寿辰，我国著名数学家、中科院院士、中国科学院数学研究所前所长、中国数学会前理事长王元教授特设宴为他祝寿。在华期间，A. 赛尔贝格还兴致勃勃地参观、游览了故宫、长城、颐和园、天坛、孔庙、兵马俑等名胜古迹。在 A. 赛尔贝格访问过程中，我国著名数论专家潘承彪教授陪伴着他。潘承彪教授对笔者说："A. 赛尔贝格的工作对以陈景润为代表的我国解析数论工作者的工作有直接的重要影响；A. 赛尔贝格也对陈景润的工作有很高的评价。"

P. D. 拉克斯
(Lax,Peter D.)



“P. D. 拉克斯教授的影响不管是在纯数学中还是在应用数学中都是深刻而又有决定性的。”

——摘自:Wolf Prize Awarded to Ito and Lax. Notices of the American Mathematical Society,1987,34(2):286

“应用数学是一种异常广阔的学科,最好的应用数学是与最好的纯粹数学同样深奥、美妙和有趣的。”[64]

“我衷心地建议所有年轻数学家到应用数学的某些分支去一试锋芒,那里藏有许多问题的金矿,其解决有待于概念和技术上的突破。”[87]

——P. D. 拉克斯

P.D. 拉克斯是匈牙利裔美国籍数学家,1926 年 5 月 1 日生于匈牙利布达佩斯。

由于他在分析学、偏微分方程和应用数学中做出了突出的贡献,1987 年荣获沃尔夫数学奖,时年 61 岁。

P.D. 拉克斯是犹太人,15 岁时随家人逃到美国。1944 年参军,曾接受工程训练,1945 年到洛斯阿拉莫斯国家实验室工作一年,后来进入纽约大学学习,1949 年在纽约大学获博士学位。他是著名数学家 R. 柯朗指导的最后一名研究生。1949 年任纽约大学助理教授,1950—1958 年又回到洛斯阿拉莫斯国家实验室工作。1958 年曾在德国任教。1958 年开始任纽约大学教授。1964—1972 年在美国原子能委员会兼任计算和应用数学中心主任。1969—1971 年任美国数学会主席。1972—1980 年任纽约大学柯朗数学研究所所长。1980—1986 年为国家科学委员会成员。P.D. 拉克斯是美国国家科学院院士、美国艺术与科学研究院院士、纽约科学院终身院士、法国科学院外籍院士、苏联科学院院士,他还是美国布朗大学等多所美国大学和法国巴黎大学等欧洲著名大学的荣誉博士。

P.D. 拉克斯的思维敏捷,才华出众。当他听了 L. 施瓦尔茨作的广义函数讲演后,就用 L. 施瓦尔茨的方法解决了偏微分方程的有关问题,并独树一帜。作为柯朗研究所的毕业生,在他身上体现了由 R. 柯朗所继承的 D. 希尔伯特的优良传统,并成为 R. 柯朗的继承人。P.D. 拉克斯发表了许多论著,他在线性及非线性偏微分方程理论及应用、守恒定律、泛函分析、孤立子理论、散射理论、计算数学等方面都很有建树。他的建树包括:带振荡数据的柯西问题的解、散射理论的全面发展、非线性守恒定律的理论以及对科尔泰韦赫-德弗里斯(Korteweg-de Vrise)方程的远见卓识。例如:他用半群方法对于系数仅依赖于 x 的方程解决了第一初值边值问题;证明了椭圆型方程组弱解在区域内部的可微性;证明了双曲型方程的解的奇性沿次特征传播。对于微分算子他也有重要建树:他证明了,当变系数微分算子 $P(x,D)$ 为 m 阶椭圆型算子

时，如果 f 在一个开集上在 $L_p(1<p<\infty)$ 意义下为 $k(0<k\leqslant\infty)$ 次局部可微，则 $P(x,D)u=f$ 的广义函数解 u 在此开集上在 L_p 意义下为 $m+k$ 次局部可微；他还证明，如果 $P(x,D)$ 为强椭圆型算子，则在 $L_2(\Omega)$ 内给定狄里克雷条件的 $P(x,D)$ 形成一个半群的生成算子。形如 $P(x,D)=\sum A_i(x)\partial/\partial x_i+B(x)$ 的算子组，如果其矩阵 $A_i(x)$，$B(x)$ 使得 $A_i^*=A_iB+B^*+\sum\partial A_i/\partial x_i$ 是半正定的，则这样的微分算子组称为正对称组，P. D. 拉克斯对正对称组作过详细而深入的研究。在涉及伪微分算子理论的应用中，P. D. 拉克斯提出了关于可对称化组。他在关于紧算子半群的研究中得到了下列重要定理：设 $T(t)$ 是 C_0 类半群，如果 $T(t)$ 对 $t>t_0$ 是紧的，则对 $t>t_0$，$T(t)$ 依一致算子拓扑是连续的。

P. D. 拉克斯对应用数学有很深的造诣。他对孤立子理论做出了重要贡献。孤立子，又称孤立子波，是非线性波动方程的一类脉冲状的行波解。它们的波形和速度在相互碰撞后仍保持不变或者只有微弱的变化。一个著名的例子是 KdV（科尔泰韦赫-德弗里斯方程）$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$ 的解 $u(x,t)=2a^2\operatorname{sech}[a(x-4a^2t)]$。这一性质使人联想起粒子，因此将这样的波称为孤立子（波）。孤立子反映了自然界中一类相当普遍的非线性现象。由于孤立子同时具有波和粒子两重性质，引起了理论物理学家的极大关注，他们尝试用它来描写基本粒子。为了求解这些具有孤立子解的特殊非线性方程，自 1967 年起提出了一种散射反演方法。该方法的特色是将这类非线性问题的解转化为线性问题来求解，最初是由 C. S. 伽德纳（Gardner）等人于 1967 年首先对 KdV 方程提出的。C. S. 伽德纳等人成功地求出了 KdV 方程的单个孤立子解以及由 N 个孤立子叠加起来的 N 重孤立子解。但如何理解孤立子之间相互贯穿而不改变形状？它与守恒定律究竟有什么关系？1968 年 P. D. 拉克斯给出了一种颇不寻常且相当巧妙的方法。他对 C. S. 伽德纳等人的思想从泛函分析的角度作了十分清楚的表述，指出 KdV 方程可以写成 $L_t=[A,L]$ 形式，其中 $[A,L]=AL-LA$，L 和 A 为与 t 有关的线性微分算子。由于这个方程

在孤立子理论中的重要作用，现在人们称它为拉克斯方程，并将其中的 L 和 A 称为拉克斯对。自此以后，散射反演方法逐渐发展成一种求解非线性方程初值问题的系统方法，引起了数学界的广泛重视。孤立子理论的发展，对数学和物理学都具有重要意义。物理学中一些基本方程如规范场论中的自对偶杨-米尔斯方程、引力场理论中的轴对称稳态爱因斯坦方程以及一系列在流体力学、非线性光学、等离子物理中有重要应用的方程，都已应用孤立子理论中的方法找到了许多有兴趣的精确解。在数学中，可积方程的判定及其代数性质、几何性质的研究，不仅将极大地丰富偏微分方程理论本身，而且将促进一系列与之相关分支如李群、辛流形、代数几何、函数论等的发展。

P. D. 拉克斯是当今极负盛名的应用数学大师，他提出了以他姓氏命名的拉克斯激波条件，并且对熵在激波理论中的作用做出了决定性的贡献。在计算数学中他提出了拉克斯-温德罗夫格式。另外，他早期建立的拉克斯-米尔格拉姆定理是线性泛函分析的基本定理之一，有着重要应用。在线性方程方面他是偏微分算子及傅里叶积分算子理论的先驱之一。他在分析和应用数学的许多领域中做出了突出的贡献。这些贡献对求解描述现实现象过程中出现的微分方程所引起的数值计算，有决定性的影响。他的影响不管是在纯数学中还是在应用数学中都是极为深刻的。

P. D. 拉克斯对“数学及其应用”和“应用数学”发表了许多深刻的意见。他说：“在大战（第二次世界大战）前大多数数学家把应用数学视为二流脑力劳动，把应用数学家视为二等公民。尽管两位带头的美国数学家 G. D. 伯克霍夫和 N. 维纳是卓越的应用数学家，他们在动力学和随机现象分析方面的成就是受到物理学的启发的，但是他们仅仅受到年轻一代的敬慕，却未广泛地得到他们的效法。”[64]“从那时起，应用数学已经走了一大段路，虽然以后还有很长的路要走。它仍然被视为一种专门技术，常常只是受到带有挑剔性的而非真正的尊重。但是没有人否认应用数学是一门异常广阔的学科，最好的应用数学是与最好的纯粹数学同样深奥、美

妙和有趣的。此外，已经有了强有力的应用数学研究中心，在许多地方和许多领域中正在进行着大量卓越的研究活动。"[64] 为什么会产生这种变化呢？P. D. 拉克斯认为："科学与技术的作用对打赢这场战争（指第二次世界大战）是关键性的。……在战后负责科学政策的人很好地汲取了这一经验，并且有远见地、有想像力地加以运用。他们体会到技术的基础是应用科学，而后者又从基础研究中取得营养。他们也体会到应用数学是应用科学的必要组成部分，因此，在战后政府首先通过海军研究局，后来又通过别的机构对于应用数学和纯粹数学的研究都给予全力支持，这一支持对应用数学的成长是必要的。"[64]"另一必不可少的因素是数学界的领导人物，……R. 柯朗、K. 弗里德里希、M. 卡茨、T. 冯·卡门(von Kàrmàn)、R. 冯·米泽斯(von Mises)、J. 冯·诺伊曼等。J. 冯·诺伊曼的影响特别大，从他的全集可以看出，他的兴趣在战后完全转向应用。……他这个榜样无疑影响了他的许多朋友和仰慕者。"[64] 关于电子计算机对数学的影响，他说："无可置疑，应用数学是在过去 20 年中快速大容量电子计算机的普遍使用的影响下形成的。"[64]"计算机对于应用数学经典性分支的影响也同样大。"[64]"计算机也有助于弥合应用数学与工程技术的差距。"[64]"将来我们会看到，在高级的裂变、聚变、化学反应堆设计、地震机理研究、生物医学研究和其他许多领域中，数学将越来越起核心作用。"[64]"大量用于设计工作的实验被数学模型的研究逐步取代。"[61]"无疑，数学模型的方法已代替了很多实验，因为它在大多数的情况下更便宜，更具有通用性，也更安全。"[61] 谈到数学的地位时，他说："数学对于科学、技术及社会本身说来正日益变得重要了。"[61]"荒唐的是，正当在过去的几十年中数学的应用发生了爆炸性的进展时，对产生这些效益的创新研究的支持却下降了。"[61]"数学研究中取得成就的机会正在空前地高涨，然而要利用这些机会，就需要一个范围广泛的新计划去资助研究生、青年研究人员，并保证教员的研究时间。"[61] 为了推动应用数学的发展，P. D. 拉克斯强调："需要增加有才能的献身于应用数学人数的比例。这是

一项巨大的教育任务,可能要从中学开始。在中学里,数学应用的动机受到'新数学'(指美国中学的教育改革——编者注)的双重摧残;这种'新数学'不仅不能恰当地把数学与科学的联系教给学生,而且造成一种错觉,认为数学家把进行逻辑上琐碎的分析,比找出他们的知识在什么地方,以什么方式能被别人所利用,看得更为重要。现在可能是对中学课程及教材进行下一轮改造的时候了。"[64]"大学教育的更新甚至更为重要。要鼓励学生去学习那些依赖数学的科学,特别是要有新的教材,能够深刻地、引人入胜地表达应用的观点。由于应用的观点并不能完全从书本上或学院的环境中学到,必须有措施安排学生在适当的时候进行实习。"[64]"目前数学在非常广泛的领域里的研究蓬蓬勃勃,而且成就辉煌,但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其他科学之间的相互联系。这种不平衡对于数学以及对于它的使用者都是有害的。纠正这种不平衡是一种教育工作,这必须从大学一开始就做起,微积分是最适合从事这项工作的一门课程。"[62]对于微积分的教学,他说:"在微积分里,学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言,可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉。最后,很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案。"[62]但是"传统的(微积分)课本很像一个车间的工具账本,只载明这儿有不同大小的锤子,那儿有锯子,而刨子则在另一个地方,只教给学生每种工具的用法,而很少教给学生把这些工具一起用于制造出某个真正有意义的东西。"[62]为此,P.D. 拉克斯与另外两位美国数学家合著了一部《微积分及其应用与计算》(此书已译成中文,由人民教育出版社 1980 年出版)。这部书的取材和传统的微积分不同,它特别强调了微积分的应用,换句话说,这部书讲解了怎样把实际问题变成微积分问题和怎样用微积分解得的答案阐述实际现象;另一方面,这部书还突出了用数值计算方法去得出问题的数值解答。P.D. 拉克斯指出:"对于我们数学家来说,最大的危险不在于我们未能使人家相信数学对于解决科学、技术和管理等问题的必要性,而是在于未能通过我们

当前的政策使他们相信解决上述问题所需要的那种数学的发展和教学不是在数学系中进行，而是在物理系、工程系、地球物理系、化学系、运筹学系、统计学系、计算机科学系以及独立而地位相同的应用数学系中进行的。”对于应用数学和纯粹数学的关系，他说：“今天，应用数学和纯粹数学比 20 世纪 70 年代中的任何时候都更加密切地联系在一起。”[61]“数学被分成纯粹与应用数学是近代的事，也是暂时的现象，对 J. H. 庞加莱、W. R. 哈密顿(Hamiton)、J. C. 麦克斯韦(Maxwell)、G. G. 斯托克斯(Stokes)、L. 凯尔文(Kelvin)、L. 雷利(Rayleigh)、G. 布尔(Boole)、C. F. 高斯、G. F. B. 黎曼、C. F. 克莱因、D. 希尔伯特、J. W. 吉布斯(Gibbs)来说并不存在这种分离。C. F. 高斯是数学之王，也是计算之王，例如，他的遗著表明他使用了快速傅里叶变换。”[61]他认为：“当然，纯粹数学与应用数学的一个最重要的联系在于智力方面：应用提出新问题，而理论方面则发展解决其中一些新问题的工具。”[61]他最近在《应用数学在美国的蓬勃发展》一文中指出：“今天我们可以毫无顾忌地说，纯粹数学的浪潮已经逆转；多数数学家都清醒地认识到，并不是数学像细流一样渗透到应用之中去，数学与科学(主要是物理，但决不限于物理)是一对同等的伙伴，互相向对方提供思想、概念、问题及解决办法。在不太久远的过去，如果一位数学家说‘应用数学是坏数学’，或者说‘最好的应用数学是纯粹数学’，他会得到别人的赞同与欢迎，但今天，如果有人仍这么说，他就会被人们视为愚昧无知。”[87]他深情地说：“我衷心地建议所有年轻数学家到应用数学的某些分支去一试锋芒，那里藏有许多深奥问题的金矿，其解决有待于概念和技术的突破。”[87]

P. D. 拉克斯在 1974 年获美国数学会的乔维恩特奖。1975 年获美国数学会和工业及应用数学会的维纳奖，以表彰他在应用数学方面的广泛贡献，特别是他在偏微分方程数值和理论方面以及散射论方面的卓越贡献。1986 年他荣获由美国总统亲自颁发的美国国家科学奖章。1992 年他荣获美国数学会授予的斯蒂尔奖中的终身成就奖。2005 年荣获阿贝尔奖。

P. D. 拉克斯的主要著作有:《偏微分方程理论》、《泛函分析》、《流体力学》等,并发表了 100 多篇重要论文。

P. D. 拉克斯于 1980 年曾应邀来我国北京参加第一届"微分几何和微分方程国际会议"。1993 年 6 月,他又应邀来北京参加了"非线性发展偏微分方程国际会议",并在会上作了《微分差分方程组的振荡解》的演讲,通过非常认真细心的数值分析,P. D. 拉克斯展示 J. 冯·诺伊曼于 1944 年提出的关于"蛙跳型中心差分格式的解强收敛于一维可压缩流方程组的解"的猜想是不正确的,并通过一些典型方程的分析,提出一些振荡解的极限和经典湍流理论的关系。他的这个演讲受到了与会者的热烈欢迎和高度评价。会后 P. D. 拉克斯还应邀到中国科学院数学研究所、计算中心、系统科学研究所,北京大学,北京应用物理和计算所进行了短期讲学。P. D. 拉克斯对中国和中国数学工作者很友好,他在 1993 年 6 月"非线性发展偏微分方程国际会议"开幕式上作了热情洋溢的讲话,他说:"这是我在北京友谊宾馆参加的第二次数学方面的国际会议,自从 1980 年的第一次会议以来,中华人民共和国到处都发生了巨大的变化,绝大部分都是朝好的方面变化,虽然不是没有缺点的,但我相信这些缺点都是暂时的。……在 1980 年中国刚刚开始从'文革'的噩梦中醒来,……受尽折磨的那一代人并不甘愿成为失落的一代,他们坚持进行了杰出的研究工作,并选拔和教育出了一代新的年轻的数学工作者,很多人都被送到国外去继续或者完成他们的学业,其中许多人已经成为当今最卓越的学者……"[95] P. D. 拉克斯已荣任中国科学院应用数学所名誉研究教授、《应用数学学报》的外籍编委,并获北京大学荣誉研究博士称号。

伊藤清
(Itô Kiyosi)



“伊藤清由于对纯粹与应用概率论做出了奠基性的贡献,特别是创立随机积分而享得荣誉。”

——摘自:Wolf Prize Awarded to Itô and Lax. Notices of American Mathematical Society,1987,34(2):286

“纯粹数学中严谨的论证与优美的结构深深地吸引了我。”[56]

“许多数学概念都根植于力学之中”。[56]

—伊藤清

伊藤清是日本数学家，1915年9月7日生于日本三重县。

由于他对纯概率论和应用概率论做出了杰出的贡献，特别是创立了随机微积分，1987年荣获沃尔夫数学奖，时年72岁。

伊藤清1935—1938年就读于东京大学数学系。1939—1943年在政府统计局工作。1943—1952年在名古屋大学任教，1943年开始任副教授，1945年获理学博士学位。1952年任东京大学教授。1952—1979年在东京大学任教，但是在这27年中，他大约只有一半时间在东京，其余一半的时间在国外。他去过的地方有普林斯顿(1954—1956年)、斯坦福(1961—1964年)、康奈尔(1969—1975年)及丹麦(1966—1969年)。1976年，他任日本数理解析研究所所长。1977年当选日本学术会议会员。1979年任日本学士院教授。他曾任日本数学会理事长。

伊藤清在东京大学上学时，便被纯粹数学中严谨的论证与优美的结构深深地吸引了，并认识到许多数学概念都根植于力学之中。在数学与力学的天地里漫游时，通过统计力学，他最终对随机过程发生了兴趣，并参加了日本著名数学家弥尔昌吉(Iyanaga Shokichi)教授主持的讨论班。在读了A.N. 柯尔莫哥洛夫的《概率论的基础》及P.P. 莱维(Lévy)的《随机变量的加法理论》等名著之后，打下了坚实的概率论基础。他在统计局工作期间，于1942年在《日本数学杂志》上发表了他的第一篇论文。在这篇论文中，他引入了刻画可微过程跳跃的泊松随机测度。后来他又在大阪大学的一份油印的杂志上发表了他的第二篇论文。在这篇论文中，他得出了决定马尔可夫过程轨道的随机微分方程的概念，它可以只借助一个可微过程的随机微分方程的微分来表示。用概率论的理论和方法研究随机微分方程，虽不是从伊藤清开始的，但他做出了系统而严密的奠基性工作。他在名古屋的前一半时间，对遍历理论、非交换群上的正定函数，以及布朗运动和调和函数之间的关系，特别是对样本轨道有兴趣。1951年，他将N. 维纳的齐次不规则运动稍加修改定义了多重维纳积分。1953年，他引入了复

多重维纳积分。伊藤清在名古屋的后半时期,流形理论开始吸引青年人的注意力。在这样一种气氛的感染下,他对紧流形上的扩散产生了兴趣,此扩散的生成算子是退化的椭圆型算子。他试图利用局部坐标,通过写出随机微分方程的方法来构造扩散的轨道,并相继写出了三篇论文。虽然他这三篇论文未能全部实现上述想法,但却意外地获得了随机微分的锁链法则。这一法则在理解生成算子的概率意义时是很有用的。20 世纪 50 年代后期,他与 H. P. 麦基恩(Mckean)合作,借助 P. P. 莱维的局部时概念,成功地构造了具有弹性边界的布朗运动的轨道,并合作写了一本书,名为《扩散过程及其样本轨道》(于 1965 年正式出版)。他们还合写了两篇论文:一篇是关于随机徘徊与势的;另一篇讨论了半直线上如何针对各种可能的边界条件来构造布朗运动。1956 年,伊藤清以更一般的角度定义了由可加过程导出的多重随机测度以及多重随机积分,并将其应用于种种问题。他还研究过多变数情况的广义随机过程。20 世纪 60 年代初,他获得了随机平移的概念。20 世纪 70 年代,他借助鞅积分搞清了他的积分与斯特拉托维奇积分之间的联系,并且阐明了某些数学上的应用;他还确定了马尔可夫过程在常返点的所有可能行为,从而推广了他与 H. P. 麦基恩共同得到的结果。在遍历理论中,他把非奇异变换的不变测度问题的一些结果推广到非奇异马尔可夫转移函数的情形。他还研究过概率母函数的有关问题。后来他开始对以无穷维随机微分方程来处理具有无穷自由度的动力系统发生兴趣,他先研究了基本事实并验证了特殊例子,后来,他习惯于以无穷维的观点来观察即使是有限维的事实,这一习惯引导他将上述问题作为一个在游弋空间中取值的泊松点过程。

伊藤清的成就使人们充分了解了马尔可夫样本道路的无穷小展开。这可以看做是随机领域里的牛顿定律,它提供了起制约作用的偏微分方程和内在的概率机制之间的一个直接转换。它的主要组成部分是布朗运动的函数的微积分。由此而产生的理论是现

代概率论(不论是纯粹的还是应用的)的基石。伊藤清的工作使人们对工程的计划、控制和最优化,以及其他一些基本上是随机而非确定系统的有关问题和现象,有了深刻的理解。

伊藤清创立随机积分颇负盛名。随机积分是对某些随机过程类适当定义的各种积分的总称,它们在随机过程与随机微分方程的研究和应用中各有其重要作用。以伊藤清的姓氏命名的伊藤积分是对布朗运动定义的一种随机积分。布朗运动的样本函数虽然连续,但几乎所有的样本函数非有界变差,甚至处处不可微,因而无法按样本函数来定义通常的黎曼-斯蒂尔杰斯积分或勒贝格-斯蒂尔杰斯积分。一般说来,黎曼-斯蒂尔杰斯积分定义中的达布和不会以概率 1 收敛到一定的极限,但在适当的条件下,达布和的均方极限存在。伊藤清正是利用这一性质定义了对布朗运动的随机积分。而伊藤积分最重要的性质是如下所示的著名伊藤公式:

$$F(W(b)) = F(W(a)) + \int_a^b F'(W(t))\mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2}\int_a^b F''(W(t))\mathrm{d}t$$

其中,F 是二次连续可微实函数,$W(t)(t\geqslant 0)$是布朗运动。这个公式及其各种推广在理论上和应用上都有重要的作用。例如,可以用来证明关于布朗运动的鞅刻画的莱维定理(即一个从零出发的样本连续过程 $W=\{W(t),t\in R_+=(0,\infty)\}$为布朗运动的充要条件是 W 和$\{W^2(t)-t,t\in R_+\}$都为鞅)。

在概率论与随机过程这个领域中,有不少以伊藤清的姓氏命名的方程、公式、积分、过程等。

伊藤清不但研究成果卓著,而且还培养和造就了整整一代日本的概率论专家,他们是池田(N. Ikeda)、渡边(S. Watanabe)、福岛(M. Fukushima)、稗田(M. Nisio)、国田(H. Kunita)等。

伊藤清 1978 年荣获日本学士院赏恩赐赏。

伊藤清说:"科学的目的是从已知推断未知。如果从已得到的资料能做出惟一正确的推断,则可建立确定性模式,分析学为此提供了手段。当现象极其复杂,不可能作惟一推断时,只好从已知来

求未知的平均，为此应建立随机性模式，随机分析学为此提供数学手段。"[57]

伊藤清指出："数学取得了显著的进步，数学各分支相互联系越来越密切，作为有机整体的数学正在形成。此外，与数学有关的其他学科也用了很多高深的数学理论，对作为科学基础的数学的期待是很高的。"[61]

伊藤清对概率论发表了如下见解："概率论的问题，涉及的面非常广泛。根据问题的种类，各自建立直观认识的原理，并从此进行演绎推理，这种状态一直继续下去，而且到了今天，这个倾向好像仍然存在。但是，对于这种状态，人们不能不说概率论是几个分科的集合。欲使概率论被看做一个完整的体系，就必须树立一个根本原理作为按问题的种类而建立的原理的进一步的基础，并从此阐明整个概率论的问题。"[59]

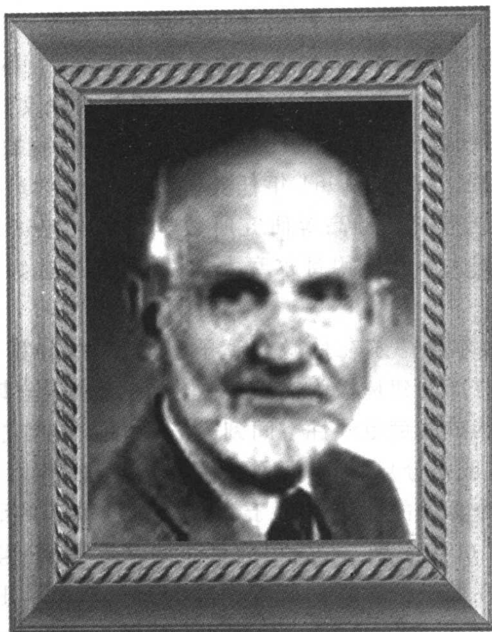
伊藤清的主要专著有：《随机过程论》(1942 年)、《概率论基础》(1944)、《论随机微分方程》(1953)、《随机过程》(1957)、《概率论》(1952 年)等。其中，《概率论》和《随机过程》已译成中文，分别由科学出版社、上海科学技术出版社于 1963 年、1961 年出版。

世界著名的斯普林格(Springer)出版社 1987 年出版了伊藤清的选集，这部选集差不多是伊藤清科学论文的全集。它反映了伊藤清所做的贡献，主要涉及他所创立的随机微分理论的基础问题，其余论文则讨论扩散理论、布朗运动、回归理论和随机微分方程。该选集所有的论文都反映出伊藤清对概率学科的极为深刻的探讨，并将读者引进了一个重要而又非常活跃的现代数学领域。该选集还有编者所写对伊藤清工作的评论及伊藤清本人评论其研究工作发展的前言。

伊藤清 1981 年以日本数学会理事长的身份曾来我国进行学术访问，并作了学术演讲。

伊藤清 1998 年当选美国国家科学院外籍院士。

L. V. 赫尔曼德尔
(Hörmander, Lars Valter)



“L. 施瓦尔茨……提出了不少有关微分算子的问题。其后，一套相当全面的理论建立了。在众多的研究者中，L. V. 赫尔曼德尔在这方面的成果是最深入和最重要的。”[66]

——L. 加丁(Garding)

“如果想为偏微分方程建立一个简单而普遍的理论，多变量函数的古典运算是不适用的。”[68]

“现代微分方程理论中的一个普遍特征是希尔伯特空间中算子的抽象理论的应用。”[67]

——L. V. 赫尔曼德尔

L. V. 赫尔曼德尔是瑞典数学家，1931 年 1 月 24 日生于瑞典隆德。由于他在近代分析中做出的成就，特别是对伪微分算子和傅里叶积分算子及线性偏微分方程的杰出贡献，1988 年荣获沃尔夫数学奖，时年 57 岁。他 1962 年还荣获菲尔兹奖。

L. V. 赫尔曼德尔 17 岁进入隆德大学学习，在著名的偏微分方程专家 L. 加丁的指导下，1955 年以一篇优秀论文《偏微分算子的一般理论》获博士学位。由于成绩突出，他很快就被聘为斯德哥尔摩大学教授。1963—1964 年任美国斯坦福大学教授。1964—1968 年任美国普林斯顿高等研究所数学教授。1968 年以来他先后任瑞典隆德大学和斯德哥尔摩大学教授，并当选为美国艺术与科学院院士。

L. V. 赫尔曼德尔在伪微分算子、傅里叶积分算子及线性偏微分方程等方面的建树极为杰出。微分算子(或积分算子)是从某一个由函数构成的赋范线性空间到另一个由函数构成的赋范线性空间的微分(或积分)运算的泛称。伪微分算子是微分算子的自然推广。伪微分算子的研究产生于对奇异积分算子的研究。20 世纪 50 年代末 60 年代初，奇异积分算子的米歇利姆-考尔德伦-齐格蒙特理论在偏微分方程的研究中颇为充分地显示出它的功用。比如，A. P. 考尔德伦(Calderón)用它导出关于线性偏微分方程的柯西问题惟一性定理，M. F. 阿蒂亚(Atiyah)与 I. M. 辛格(Singer)又借以建立了影响很大的椭圆算子的指标理论。推动了一些数学家致力于创立一种除奇异积分算子之外，还促进了一般变系数线性偏微分算子及其逆(当其存在时)在内的算子代数的发展，得到更精密同时又很灵活的符号演算法则。于是，定名为伪微分算子的理论便应运而生，其奠基性的代表作是 1965 年发表的 J. J. 科恩(Kohn)和 L. 尼伦伯格(Nirenberg)的《伪微分算子代数》以及 L. V. 赫尔曼德尔的一系列论著。

L. V. 赫尔曼德尔是著名的数学家 M. G. 米塔-列夫勒(Mittag-Leffler)所奠定的瑞典传统数学分析学派的优秀继承者。

对于一般偏微分方程,判定解是无穷可微的条件是一个数学难题。L. V. 赫尔曼德尔在 1955 年的博士论文《偏微分算子的一般理论》中,系统地总结了常系数线性偏微分算子理论,得到了一般偏微分方程解是无穷可微的一个简单条件,即次椭圆性条件,这是一个极为重要的一般结果。在此基础上,1958 年他又获得了进一步的结果。要判断一个变系数线性偏微分方程在什么条件下有解,是一个重要而又困难的问题,L. V. 赫尔曼德尔在系统总结了常系数线性偏微分算子的理论,并深入地研究了变系数线性偏微分方程之后,于 1959 年不仅成功地给出了存在性条件,而且还得到惟一性及正则性的有关条件,从而得到了判断变系数线性偏微分方程有解的标准。这些结果都是线性偏微分方程理论中划时代的成就。正是这项工作使他 1962 年荣获了菲尔兹奖。

L. V. 赫尔曼德尔在获奖后继续向偏微分方程领域内的更深层次开拓,从而在线性微分算子等方面取得了累累硕果。对任意常系数偏微分方程,L. V. 赫尔曼德尔对值域在特征平面上的柯西问题解的非惟一性作了详细研究。他在研究了常系数的微分算子 $P(D)$的值域后指出:$P(D)u=0$ 的解全是 C^∞ 类函数的充分必要条件是 $P(D)$为准椭圆型算子,这个结果现被称为赫尔曼德尔定理。它是使强弱两种扩张达到一致或达到边界正则性的一种条件,并指出 P 为椭圆型或边界条件为强制未必是必要的,但这些条件究竟可以减弱到什么程度,仍是一个未完全解决的问题。

L. V. 赫尔曼德尔既研究了常系数和平坦边界条件的情形,又研究了非强制边界条件的情形,他的研究与多复变函数论密切相关,令人瞩目。L. V. 赫尔曼德尔采用加权测度 $W_t(x)\mathrm{d}x$ 的 L_p 空间代替通常的 $L_p(\Omega)$空间,得到一种关于加权空间内的估计,并把它应用到对变系数微分方程的柯西问题的惟一性证明。另外,L. V. 赫尔曼德尔还利用不等式来证明斯坦流形基本定理。在微分算子组中,对于 C^∞ 函数和广义函数的情形,L. V. 赫尔曼德尔建立了常系数的超定组和不定组的一般理论。1965 年,他刻画了

常系数准椭圆型微分算子的代数特性，并证明了伪微分算子构成一个算子代数，从而使伪微分算子的理论及其应用成为近 20 多年来偏微分方程理论的热门。当 L 为线性微分算子时，对相当一般的 f，关于方程 $Lu=f$ 具有局部解的必要条件与充分条件，L. V. 赫尔曼德尔曾作了深入的研究。他在 1967 年证明：二阶次椭圆型方程在区域 Ω 的每一个点上有非负特征形式（可能乘以 -1 后）时，能够给出形式为

$$Pu \equiv -\sum_{j=i}^{r} X_j^2 u + iX_0 u + cu = f \tag{1}$$

的二次方程次椭圆性的一个充分条件，其中 $X_j(j=0,1,\cdots,r)$ 是具有无穷次可微实系数的一阶算子

$$X_j \equiv \sum_{k=1}^{m} a_j^k(x) D_k;$$

$$D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}$$

对于算子(1)，他给的条件是关于算子 $X_j(j=0,1,\cdots,r)$ 的李代数的条件。算子(1)在区域 Ω 的次椭圆性充分条件是：在 Ω 的每一点上，算子 $X_j(j=0,1,\cdots,r)$ 和由这些算子生成的换位子中，存在 m 个线性独立算子，这个赫尔曼德尔条件也是算子 P 在区域 Ω 中为次椭圆的必要条件。1970 年，他又把伪微分算子推广到更广泛的一类算子，称为傅里叶积分算子。傅里叶积分算子理论在波动方程解的渐近表示中有它的根源，应用一类傅里叶积分算子可导出能量估计，并对严格双曲型算子构成基本解。L. V. 赫尔曼德尔应用这种算子对椭圆型算子的谱函数导出了一个高度精确的渐近公式。另外，他还和 J. J. 杜斯特曼特(Duistermaat)应用马斯洛夫理论，构造了傅里叶积分算子的局部以及整体理论，使傅里叶积分算子成为线性偏微分方程理论中的一个强有力的工具。傅里叶积分算子和伪微分算子一起形成了偏微分算子论中最强有力的所谓“20 世纪 70 年代技术”。除此以外，L. V. 赫尔曼德尔在散射理

论、非线性双曲方程和纳什-莫泽隐函数定理等方面也有重要建树。

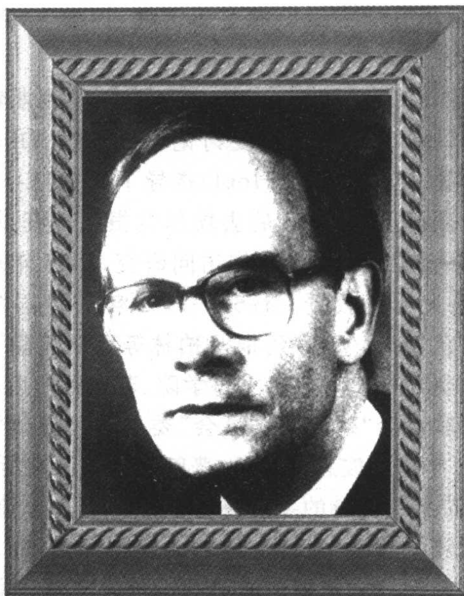
L. V. 赫尔曼德尔发表了许多论著，他的代表作有：《线性偏微分算子》(1963 年，中译本于 1979 年由科学出版社出版)、《积分论》(1970 年，与 T. 克莱松(Claesson)合著，中译本于 1987 年由科学出版社出版)、《多复变函数论导引》、《线性偏微分算子的分析》(1983 年)等。《线性偏微分算子》给出了线性偏微分方程和边值问题解的存在性、惟一性和正则性问题的系统研究；总结了 20 世纪 70 年代以前该领域的主要研究成果，是线性偏微分算子一般理论方面的名著。泛函分析和分布理论组成了该书所展开的理论的框架。《积分论》与通常以测度论为起始的教科书不同，它借助于非负下方半连续函数来引进并讨论抽象的积分和测度概念及其性质，内容丰富而精炼，贯穿了近代分析学的观点和方法，写得很有特色。另外，L. V. 赫尔曼德尔关于微分算子方面的四卷本论文集是该分支的百科全书式的论著。

L. V. 赫尔曼德尔对偏微分方程的有关问题，发表过不少深刻见解。他曾指出："如果想为偏微分方程建立一套简单而普遍的理论，多变量函数的古典运算是不适用的。"[68]"现代微分方程理论中的一个普遍特征是希尔伯特空间中算子的抽象理论的应用。"[67]他还认为："现在流行的研究变系数微分算子的方法的主要部分，事实上也是在高阶(强)椭圆型微分方程的狄利克雷问题研究中发展的。"[68]"伪微分算子理论部分地结合到指标问题研究的最近发展，使得不仅对椭圆型边值问题有更简单和更自然的处理成为可能，而且可以用具单特征的微分算子方法的一种推广来研究非椭圆型边值问题。"[68]

1982 年，L. V. 赫尔曼德尔曾应邀来我国参加在长春举行的第三届微分几何和微分方程国际会议。他虽然是世界数学大奖的获得者，蜚声数坛，但却没有任何架子，对中国数学工作者的报告都认真听取，并提出了不少宝贵意见。他还无私地把他尚未写完

的书稿借给中国同行。他诚挚地指出：专业不要分得过细、过早，学习偏微分方程的青年人应该在代数、拓扑等方面有一个坚实的基础，不然是不会有太大发展的。这不仅是他的真知灼见，也是他取得辉煌成就的宝贵经验。

F. E. P. 希策布鲁赫
(Hirzebruch, Friedrich Ernst Peter)



在过去35年中,F. E. P. 希策布鲁赫的名字与拓扑、代数几何和整体微分几何领域里的著名结果联系在一起,所有这些结果都标志着重要理论的开端,对现代数学的发展产生了巨大影响。

——沃尔夫基金会评语

"希尔伯特模曲面给了我们大量的代数曲面的例子,这些曲面无论从数论还是从代数几何的观点看都是很有意思的。"[72]

"没有数学就不会有有组织的逻辑思维。"[113]

——F. E. P. 希策布鲁赫

F. E. P. 希策布鲁赫是德国数学家，1927 年 10 月 17 日生于德国哈姆。

由于他将拓扑学、代数、微分几何及代数数论结合起来的出色工作，以及在应用数学中做出的突出贡献，1988 年荣获沃尔夫数学奖，时年 61 岁。

F. E. P. 希策布鲁赫 1945—1949 年就学于明斯特大学，曾参加 H. 贝恩克(Behnke)的多复变讨论班。1949—1950 年在苏黎世的著名数学家 H. 霍普夫(Hopf)指导下研究拓扑学。1950 年在明斯特大学获博士学位，其后去埃尔兰根大学任助教。1952—1954 年在普林斯顿高等研究所作访问研究，1955 年成为副教授。1956 年到波恩大学任教授。1960—1962 年任德国数学会主席。他是德国美茵茨、海德堡、哥廷根及柏林等科学院院士，是美国国家科学院、法国科学院、荷兰皇家科学院、苏联科学院的国外院士。他是国际数学联合会"跨世纪委员会"委员，曾任《数学纪事》等杂志编辑。1982 年创建波恩马克斯-普朗克数学研究所，并任所长。

F. E. P. 希策布鲁赫的主要成就包括：(1)微分流形号差定理的发现及代数簇上黎曼-罗赫定理的表述与证明；(2)微分流形示性类的完整性定理；(3)复齐性流形的比例性定理和紧致李群齐性空间示性类的一般理论；(4)复 K 理论及其谱系列和各种几何应用；(5)通过 4 维流形理论对戴德金互反定理的"拓扑"证明及微分拓扑与代数数论之间的其他有趣的关系；(6)希尔伯特模形式和曲面及其与类数的关系的系统研究。

F. E. P. 希策布鲁赫属于战后迅速跟上国际研究潮流的德国年轻一代数学家。1954 年，他在普林斯顿高级研究所时，就以令人瞩目的方法在多种情况下解决了上世纪由 G. F. B. 黎曼提出的一个代数几何问题：对于任意给定的除子 D，在闭黎曼曲面 M 上存在多少个线性无关的亚纯函数 f，使 f 的除子(f)满足$(f)\geqslant D$? 如果把这样的线性无关的亚纯函数的个数记作 $L(D)$，G. F. B. 黎曼首先用解析方法证明了不等式：$l(D)\geqslant d(D)-g+1$。这里，

$d(D)=\sum n_i$ 称为除子的阶数，g 是亏格（是曲面的拓扑不变量）。随后他的学生 G. 罗赫(Roch)在这个不等式中加入一项 $i(D)$（它是 M 上线性无关的亚纯微分 ω 的个数），使这个不等式变成了等式：$l(D)-i(D)=d(D)-g+1$，这就是著名的黎曼-罗赫定理。它是黎曼曲面的基本定理，也是代数几何的一条中心定理。日本著名数学家小平邦彦用调和分析理论首先将这个定理由曲线推广到曲面，而 F. E. P. 希策布鲁赫则应用层的语言和 A. 波莱尔(Borel)及 R. 托姆(Thom)的拓扑成果又把它推广到高维复流形上。这一结果，今天称为黎曼-罗赫-希策布鲁赫定理。简单地说，此定理处理的问题是：零点和极点满足一定条件的代数函数有多少，并依所论函数的线性空间的维数求其数学表达式。现在发现，与 F. E. P. 希策布鲁赫的研究密切相关的类似问题出现在有许多实际应用的微分方程中。

由 G. F. B. 黎曼在 19 世纪中叶阐明的"流形"概念在 F. E. P. 希策布鲁赫的研究中起着决定性的作用（希策布鲁赫定理适用于代数流形）。人们将曲线和曲面的概念推广到任意维数，即得到流形的概念。曲线被理解为一维流形，曲面为二维流形。按照在某种数学运算下保持不变的性质，即所谓不变量，将流形分类，常常能够洞察原先不易看出的流形的内在联系。1954 年由突变论的创立者法国数学家 R. 托姆得到的、首次对所有流形有效的所谓协边论分类，导致许多在数学之外也很有价值的重要结果。F. E. P. 希策布鲁赫利用 R. 托姆的分类，得以证明代数流形的两个有不同起源的不变量相等，其中一个不变量是原先由拓扑决定的，另一个不变量由函数空间的维数得到，更多地属于代数—解析领域。这样，所得函数空间的维数就与纯拓扑不变量有了关系，代数—解析的考虑以意想不到的方式与拓扑问题相互紧密地联系在一起。F. E. P. 希策布鲁赫的这项成果很引人注目。著名德国数学家 C. H. H. 外尔在 1954 年国际数学家大会上向菲尔兹奖获得者小平邦彦和 J. P. 赛尔授奖时高度评价了他们，而 F. E. P. 希策

布鲁赫的工作包含了小平邦彦和J.P.赛尔在这方面的结果，从而格外令人瞩目。F.E.P.希策布鲁赫的定理引起了许多后继性的结果，并不断得到新的应用。法国数学家A.格罗腾迪克(Grothendieck)为了把黎曼-罗赫-希策布鲁赫定理进一步推广，引进了一个类似上同调的函子，对于每个代数簇X，对应于X上代数向量丛的同构类，这就是K函子。1959年，F.E.P.希策布鲁赫与英国数学家M.F.阿蒂亚合作，把K函子推广到紧拓扑空间上。他们根据A.格罗腾迪克代数几何的思想，从向量丛的等价类构造K群，得出了与拓扑学上同调群非常类似的K群，因此，K理论就被称为广义上同调论。它的出现立即给数学家提供了一个新的有力工具，它能解决过去用别的方法所不能解决的问题。例如，这个K群理论加上R.博特(Bott)的周期性，在微分拓扑学中得到有效应用，如球面上向量场问题的解决、射影空间的嵌入问题等等。更强的推广是1966年M.F.阿蒂亚和美国数学家I.M.辛格的"指标定理"。希策布鲁赫定理和指标定理指出了拓扑学和分析的许多方向。F.E.P.希策布鲁赫发现了它们和数论及模函数理论的联系。他与波恩大学及马里兰大学的G.B.扎盖尔(Zagier)的共同研究得出关于一类特殊代数流形(称为希尔伯特模曲面)以及从属于此的模函数的一些新结果。这是最近20多年来全世界许多数学家热衷的研究课题。1973年，F.E.P.希策布鲁赫与弗赖塔格(Freitag)成功地计算了与实数域相关的希尔伯特模簇的不变量。

F.E.P.希策布鲁赫是波恩数学中心的奠基者。他深深地认识到，美国普林斯顿高等研究所的令人振奋的学术气氛是他开始取得成功的重要条件。因此，从1955年到波恩大学任教起，他就决心在他的祖国建立一个能与之媲美的机构，推行理论数学的客座研究人员计划。于是，他第一步在1957年开始举办"数学工作会议"，使来自全世界的前沿研究人员每年一次云集波恩，交流理论数学的最新成果。例如，1965年法国著名数学家R.托姆在这

里报告了他的“突变理论”，对自然界中各种突变形式的形成给了数学解释；英国著名数学家 M. F. 阿蒂亚在工作会议上报告了他的指标定理及杨-米尔斯(Yang-Mills)理论的微分几何观点。第二步，F. E. P. 希策布鲁赫发起制定一个“理论数学”特别研究计划，这个研究计划于 1969 年奠基于波恩大学数学研究所，并提供了非常优越的工作条件，有效地把优秀的数学家作为大学教师吸引到波恩来。吸引来的四十位来自国内、外的客座研究员，其中有许多是后起之秀。他们一般可以一年不担负行政职务和教学任务，而专门从事研究工作。他们组成了关于模形式与数论、代数几何与复分析、代数群与算术子群、代数拓扑以及微分几何与变分学等工作小组。第三步，由 F. E. P. 希策布鲁赫于 1982 年创建的马克斯-普朗克数学研究所于 1985 年完全落成。该所同样以客座研究人员小组的形式工作，这个研究所具备良好的条件，它的建立是 F. E. P. 希策布鲁赫为发展德国的理论数学而作的 30 年努力的光荣纪念，他的奋斗目标是要使它成为德国数学的“普林斯顿”。

由于理论数学今天已经与计算机密切相关，用计算机做的实验能帮助人们认识规律，并鼓励人们从事吃力的证明。若非计算机事先指出一个猜想是否可能成立，人们根本不会去着手进行它。F. E. P. 希策布鲁赫认为：数学家只靠笔、纸和图书馆即可工作，且除了会议旅差费外别无其他开支的观念是不全面的。因此，在他创建的波恩马克斯-普朗克数学研究所里，与应用领域相联系的研究课题受到了重视与保护，并建立了一个“数学物理”工作小组。

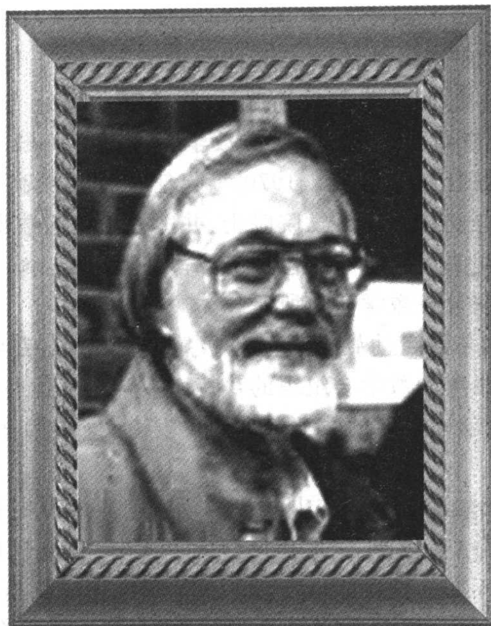
F. E. P. 希策布鲁赫于 1981 年曾应邀到我国进行访问，并在中国科学院作了《代数曲面》的系列讲座，在北京大学以《二十面体》为题作了学术讲演，他说：“很高兴能到中国并在这里作报告。”[72] 1997 年 10 月 28 日至 11 月 9 日，他又应中国数学会的邀请来我国访问，并先后在中国科学院数学研究所和北京大学数学科学学院作了题为《加拉比-尧流形和伽罗瓦最后定理》的学术报告。他还对中国数学会申办 2002 年国际数学家大会表示热情支

持，并对 1981 年访华以来中国所发生的惊人变化表示赞赏。他从 1979 年起任德国洪堡基金专家委员会委员，曾热忱帮助、接待过许多获洪堡奖学金的中国访德学者。

世界著名的斯普林格（Springer）出版社 1987 年出版了 F. E. P. 希策布鲁赫的两卷文集。这两卷文集收载了希策布鲁赫 1951—1987 年几乎所有的科学论著，包括其专著《代数几何中的拓扑方法》及与他人合写的文章，还有七篇过去未曾发表的论文和一些迄今难得看到的材料。F. E. P. 希策布鲁赫本人对其科学著作有广泛的评述，详细讨论了他早期论文中提出的问题以及这些问题的来源，同时还包括这些问题后继发展情况的讨论和一些历史资料，例如以前未发表过的信件摘要等。

F. E. P. 希策布鲁赫 1989 年荣获罗巴切夫斯基奖。他是 1998 年国际数学家大会的名誉主席。

J. W. 米尔诺
(Milnor, John Willard)



“当 J. W. 米尔诺在七维球上发现了奇异微分结构时(1956 年),微分在拓扑学中起着一种冲击波的作用。”[40]

——陈省身

“对于数学研究,我最爱的东西是它的不受拘束的无政府状态!这里没有数学沙皇的饬令来告诉我们必须按什么方向工作,我们必须做什么。”[136]

——J. W. 米尔诺

J. W. 米尔诺是美国数学家，1931 年 2 月 20 日生于美国新泽西州奥兰治。由于他在拓扑学(特别是微分拓扑)方面的杰出贡献，1989 年荣获沃尔夫数学奖，时年 58 岁。他 1962 年还荣获菲尔兹奖。

J. W. 米尔诺早年就读于普林斯顿大学，1951 年毕业，23 岁获博士学位，继而留在普林斯顿大学任教。1954 年任副教授，1956 年任教授，1963—1966 年任数学系主任。1968—1970 年在麻省理工学院任数学教授。1970 年起任普林斯顿高等研究所教授。米尔诺是美国国家科学院院士，并曾担任美国数学会副主席。米尔诺的一生真可谓少年得志，中年辉煌。他从 1989 年起任纽约州立大学石溪分校数学研究所所长。

J. W. 米尔诺自幼勤奋好学且极富数学才华，在学生时代的早期就荣获由美国数学会组织的普特南数学竞赛优胜奖。在大学学习期间，他就在著名的数学杂志上发表论文，内容是关于纽结的曲率。

J. W. 米尔诺是当代杰出的拓扑学家。拓扑学是数学中一个重要的基础分支。起初它是几何学的一支，研究几何图形在连续变形下保持不变的性质(所谓连续变形，形象地说就是允许伸缩和扭曲等变形，但不许割断和黏合，因此有“橡皮几何学”的俗称)。人们一般认为拓扑学源于 L. 欧拉(Euler)解柯尼斯堡七桥问题，并把欧拉定理(对任意闭的凸多面体，恒有：顶点数－棱数＋面数＝2，当凸多面体经过任意的拓扑变换时，公式仍成立)作为历史上关于拓扑学的第一个定理。1847 年，德国数学家 J. B. 李斯廷(Listing)出版了《拓扑学初步》一书，最早使用“拓扑”(Topologie——源自希腊文 τπos(位置、形势))这个术语作为他所讨论课题的名称，书中对拓扑学作了某些奠基性的工作。而系统的拓扑学研究则开始于法国数学家 J. H. 庞加莱(Poincaré)，他写的《位置分析》是拓扑学的经典。将近一个半世纪以来，拓扑学已发展成为研究连续性现象的数学分支。由于连续性在数学中的表现方式

与研究方法的多样性，拓扑学又分成研究对象与方法各异的若干分支。在拓扑学尚处孕育阶段的 19 世纪末，就已出现点集拓扑学与组合拓扑学两个方向。随着时代的进展和数学的发展，点集拓扑学演化成一般拓扑学，组合拓扑学则成为代数拓扑学。后来，又相继出现了微分拓扑学、几何拓扑学等分支。现在，拓扑学已成为丰富多彩的一个数学领域，并在自然科学和工程技术中有了日益重要的应用。

J. W. 米尔诺对微分拓扑学和代数拓扑学都做出了突出的贡献。他开展工作的特点是：在向一个新分支进军之前，总是要先整理、总结已知的结果，有时还写成系统的讲义，使之成为一个分支的入门；他还善于利用拓扑学的方法解决其他领域的问题，因而硕果累累。他首先发展了示性类理论，并根据微分流形的指数定理，引入微分结构不变量，在七维球面 S^7 上做出了几个微分结构，并证明它们互不微分同胚，即证明了七维球面 S^7 上有多种微分结构。他的这个结论轰动了当时的数学界，激发了许多数学家的想像力，从而使微分在拓扑学中起着一种冲击波的作用。以此为开端，微分拓扑学可以说正式成为一个数学分支，并且相当活跃。J. W. 米尔诺通过深入研究有关代数及拓扑理论，运用同伦论进一步证明了七维球面有且只有 28 种不同的微分结构。对于更高维的球面，他也和别人合作得到了相当完善的结果。

1958 年，J. W. 米尔诺利用拓扑学的结果来解决代数和几何学中的经典问题，并证明了实数域上的可除代数（不假定乘法结合律和交换律）只有实数域、复数域、四元数体和凯莱代数。他还证明：只有当 n 为 1，3，7 时，n 维球面上才存在处处平行的向量场。20 世纪 50 年代末 60 年代初，J. W. 米尔诺发展了配边理论，特别是为发展复配边、自旋配边等理论做了很多工作。1961 年，他证明互相配边的两个紧流形可以通过有限次换球术互变。其中的复配边理论应用广泛，并已成为一个重要的数学工具。

1961 年，J. W. 米尔诺对组合拓扑学的一个重要问题——庞

加莱猜想的主猜想(即如果 T_1 和 T_2 是同一个三维拓扑流形的单形剖分(不必是平直的),那么 T_1 和 T_2 有同构的重分)举出了反例。他证明对于低于三维的有限的单纯复形(这比流形广),主猜想成立,但对于不低于五维的这种流形,主猜想不成立;对于不高于三维的流形,主猜想成立;但对于不低于四维的流形,主猜想是否成立仍是一个尚未解决的问题。

另外,他得出了三维流形的惟一分解定理。他还举例证明了一个多面体有两种不同的分解方法,并说明一个边缘的流形里面微分同胚,但里面加上表面就不同了。在纤维丛中,他于 1956 年证明:当 G 是可数 CW 群(即 G 是拓扑群且是可数 CW 复形,其乘法与取逆元所对应的映射是胞腔映射)时,存在分类空间 B_G,它是可数 CW 复形。对于任意的拓扑流形,可定义其上的切微丛,J. W. 米尔诺于 1964 年用此概念证明了微分流形的切丛及庞特里亚金类不是拓扑不变量。

J. W. 米尔诺于 1963 年得到:设 f 是微分流形 M 上的可微实函数,a 为正数,令 $M^a=f^{-1}(-\infty,a)=\{p\in M|f(p)\leqslant a\}$,这时,$M$ 及 M^a 的拓扑有下列基本性质:(1)设 M 是紧流形,f 是定义在 M 上的可微函数,使得除在 $f^{-1}(c)$ 上含有 K 个指数为 S_i 的非退化临界点 $p_i(i=1,\cdots,k)$ 外,在 $f^{-1}(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ 上不含其他临界点。这时,对于适当的嵌入映射 f_i,集合 $M^{c+\varepsilon}$ 与 $X(M^{c-\varepsilon};f_1,\cdots,f_k;s_1,\cdots,s_k)$ 微分同胚。(2)在所有紧流形 M 上,存在不含退化临界点的可微函数。

J. W. 米尔诺受 E. 布赖斯科恩(Brieskorn)方法的启发,应用拓扑学的技巧来研究超曲面的奇点,得到许多结果。例如,1968 年他获得如下纤维化定理:假设 V 在 $z_0\in C^{n+1}$ 的邻域由一个方程 $f(z)=0$ 来定义,则有一个相伴的光滑纤维化 $\varphi:S_\varepsilon-K_\varepsilon\rightarrow S^1$,对于 $z\in S_\varepsilon-K_\varepsilon$,$\varphi(z)=f(z)/|f(z)|$,其纤维 $F=\varphi^{-1}(p)(p\in S^1)$ 有 n 维有限 CW 复形的伦型。如果 z_0 是函数 f 的孤立临界点,则 F 具有 n 球束的同伦型。

代数 K 理论是代数的一个分支，它主要研究环（或更一般的某个范畴）上取值于阿贝尔群的一系列函子 K_n，而带有某种广义同调论的特色。该理论来源于 A. 格罗腾迪克（Grothendieck）关于黎曼-罗赫定理的工作中所用的 K 群构造。K 群构造是 20 世纪 60 年代初期由 H. 巴斯（Bass）开创的，他引进了 K_1 并与其他数学家合作大规模地研究 K_0 及 K_1。J. W. 米尔诺在代数 K 理论中颇有建树，例如，K_2 就是他引进的。关于谱相同的流形，J. W. 米尔诺在 1964 年构造了两个 16 维流形（实质是环面）的例子，尽管它们具有相同的谱（等谱），但却并不等距。

J. W. 米尔诺还对 H. M. 莫尔斯（Morse）理论作了提炼与升华。莫尔斯理论是微分拓扑的一个重要分支，通常是指两部分内容：一部分是微分流形上可微函数的莫尔斯理论，即临界点理论；另一部分是变分问题的莫尔斯理论，即大范围变分法。美国著名数学家 S. 斯梅尔（Smale）认为："莫尔斯理论是美国数学的最伟大的贡献……"。H. M. 莫尔斯在研究工作中，由于当时代数拓扑学还发展得不太完美，所以不得不通过烦琐、细致的具体分析来论证他的结果，从而使他的名著《大范围变分学》一书显得非常难懂。随着代数拓扑和微分拓扑的发展，J. W. 米尔诺以他的渊博学识，撰写了一本脍炙人口的名著——《莫尔斯理论》。该书对这一课题的基本理论作了非常完美的总结和提高，使之摆脱了繁琐的论证而呈现出清晰明朗的面貌，使以前那些浩如烟海的文献成为历史的陈迹。今天的读者只要认真研读他的这本书，就可以直接跨入这个领域，特别是可使读者沿"极小测地线"进入这一领域。

近 20 年来，J. W. 米尔诺的数学研究从微分拓扑学领域扩展到数学的许多方面，他也逐步成为一个博大精深的数学大师。J. W. 米尔诺对纤维丛、霍普夫代数理论、怀特海挠率、曲率与基本群的关系、二次型理论、代数数论等都有独到的研究。特别是他对代数 K 理论和复超曲面的奇点，做出了开创性的贡献。J. W. 米尔诺的代表作有：《微分拓扑学》、《从微分观点看拓扑》、《莫尔斯

理论》、《h 配边定理》和《代数 K 理论导引》等。他的《微分拓扑学》系统地论述了微分拓扑学这一领域中的几个重要专题:嵌入与浸入定理、向量空间丛理论和协边理论。他的《从微分观点看拓扑》用微分拓扑的方法研究拓扑学中布劳威尔映射的概念以及与其有关的某些论题,其中正则值的概念和萨德定理起着核心作用。J. W. 米尔诺的《微分拓扑学》、《从微分观点看拓扑》和《莫尔斯理论》都已被译成中文,已由上海科学技术出版社在 20 世纪 80 年代出版。J. W. 米尔诺的著作写得简明、清晰,读起来是一种享受。有人问法国著名数学家、1954 年度菲尔兹奖章获得主 J. P. 塞尔最喜欢什么风格的书或文章,J. P. 塞尔回答说:"精确性和非形式化相结合!这是最理想的,就像讲课那样。你会在……J. W. 米尔诺及其他一些作者的书里发现这种令人陶醉的融合。"

近年来,J. W. 米尔诺一直在研究与复域的有理映射有关的一个课题,业已发现该课题与遍历理论、拟共形映射、离散群以及分形理论之间存在着一些重要而又出乎人们意料的联系。

20 世纪最伟大的数学家之一 D. 希尔伯特(Hilbert)曾说:"上个世纪(19 世纪)最富启发性和最值得注意的成就是非欧几里得几何学的发现。"J. W. 米尔诺对非欧几里得几何学进一步补充了如下见解:"非欧几里得几何学在它前四十多年的历史中,就像一个没手没脚的躯体一样,与数学的其余分支完全脱离,而且也没有任何牢靠的基础。但是 C. F. 高斯的曲面理论以及 G. F. B 黎曼的高维弯曲流形理论为把非欧几里得几何学变成一个更有地位的数学分支铺平道路,……1868 年 E. 贝尔特拉米(Beltrami)两篇论文的发表,成为非欧几里得几何学历史的转折点。"[74]

1962 年,美国著名数学家 H. 惠特尼(Whitney)在斯德哥尔摩召开的国际数学家大会上评述 J. W. 米尔诺的工作时,回忆起他在 20 世纪 30 年代对微分性质与拓扑性质的关系的研究,H. 惠特尼认为自己的贡献仅仅是给未来可能的发展开了一个头,而 J. W. 米尔诺的成就使"这个未来已成为现实!"

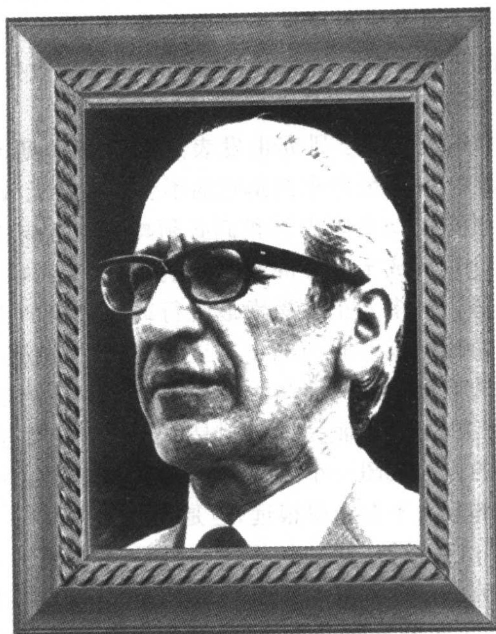
J. W. 米尔诺不仅是一位杰出的数学家，而且是一位优秀的教师。1966 年他荣获由美国总统亲自颁发的美国国家科学奖章。1982 年荣获了由美国数学会颁发的斯蒂尔奖中的重大贡献奖。

J. W. 米尔诺曾说过："从很年轻时起，我就认为对于一个研究生来说，在这个世界上发展出一种数学理论来改变我们思考社会科学的方式是最自然不过的事。"[136]

J. W. 米尔诺对数学研究也发表过不少精辟见解。他认为："对于数学研究，我最爱的东西是它的不受拘束的无政府状态！这里没有数学沙皇的饬令来告诉我们必须按什么方向工作，我们必须做什么。全世界成千上万的数学家们，每个人都沿着他或她自己的方向前进。许多人正在探索最流行或最时尚的方向，而另外一些人则在奇怪的或非时尚的方向上工作。"[136]他还说过："我喜欢把数学的边界描绘成一堵高大而外形凹凸不平的墙，一边是未知的、没有解决的问题，而另一边则是成千上万的数学家，每个人都在以不同的方法试图一小点一小点地啃掉问题的不同部分。或许他们中大部分人不会走得很远，但是，时不时其中一个人会突破这道墙从而开启一个认知的新领域。而后，或许另一个人又做出了另一个突破并打开了另一个新领域。有时，这些突破碰到了一起，数学的不同部分就融合起来，让我们看到了一个宽广的新景观。"[136] J. W. 米尔诺还指出："通常做出这些突破的人是那些著名人物，是那些我们期待他们做出好结果的人；但并非总是如此。有很多次重大的结果是由那些完全不知名的人做出来的，或者是由那些我们虽然知道但却被低估了的人做出来的，于是乎我们惊奇地发现，他们竟取得了如此多的成就，没有人有权力不去理这些人……"[136]他还说："我正在为争取数学上的宽容辩护：即便某个数学分支在今天看来似乎是无味的，它也不应该被完全放弃。重要的是，为了攻克用于了解数学世界及其应用的基本问题，我们需要在许多不同的方向都有持各种不同观点的人在工作着。"[136]

A. P. 考尔德伦

(Calderón, Alberto Pedro)



"A. P. 考尔德伦是傅里叶分析，偏微分方程以及它们相互交叉领域的开拓者。"[159]

——R. A. 费特曼(Fetterman)

"将常系数齐次微分算子……推广到变系数的情形，其方法是饶有兴趣的。"[92]

——A. P. 考尔德伦

A.P. 考尔德伦是阿根廷裔美国籍数学家,1920 年 9 月 14 日生于阿根廷的门多萨。

由于他对奇异积分理论及将其应用于偏微分方程的研究所取得的成就,1989 年荣获沃尔夫数学奖,时年 69 岁。

A.P. 考尔德伦原来的志愿是当工程师,他早先就读于蒙大拿学院,1947 年毕业于布宜诺斯艾利斯大学工程学院,并以工程师开始了自己的职业生涯。

A.P. 考尔德伦从工程师转变为一名数学家是颇具传奇性的:1948 年,美国著名数学家 A. 赞格蒙来布宜诺斯艾利斯作了几次报告,在一次 A.P. 考尔德伦参加听报告中,A. 赞格蒙推导了一遍 L^p 空间上希尔伯特变换有界性证明,这一结论是博里叶分析中最基本的结果之一。在报告之后,A.P. 考尔德伦走近 A. 赞格蒙问道,在报告中给出的证明为什么反而比他书上的证明复杂得多呢? A. 赞格蒙回答道,在报告中给出的证法就是书上的证法呀! 并对 A.P. 考尔德伦提出这样的问题迷惑不解。最后才明白,原来 A.P. 考尔德伦曾按照他自己通常学习的习惯——遮盖住书上的每一个定理的证明,努力做出自己的论证,然后把它与书上的证明相核对——学习过 A. 赞格蒙的书。而这一次 A.P. 考尔德伦忘记了去核对 A. 赞格蒙书里的证明,而是他自己给出了一个非常好的证明。当 A. 赞格蒙弄清楚事情的原委之后,他认识到 A.P. 考尔德伦极富数学才华,就诚挚地动员 A.P. 考尔德伦去他任教授的芝加哥大学学习数学,数学史上颇具传奇性的合作从此开始。A.P. 考尔德伦在 A. 赞格蒙的指导下于 1950 年获博士学位,并开始合作研究奇异积分理论。

A.P. 考尔德伦 1950—1953 年在俄亥俄州立大学任访问副教授。1954—1955 学年在普林斯顿高等研究所工作。1955—1959 年在麻省理工学院任副教授。1959 年到芝加哥大学任数学教授,并于 1970—1972 年任该校数学系主任。1972—1975 年被聘为麻省理工学院教授。1975 年起又在芝加哥大学任教授。他

是美国国家科学院院士,美国艺术与科学研究院院士。他还是布宜诺斯艾利斯科学院、西班牙科学院、拉丁美洲科学院、第三世界科学院、法国科学院的院士或国外院士。他还担任《泛函分析》杂志、《微分方程》杂志、《数学年鉴》、《伊利诺斯数学》杂志的副主编或主编。

A. P. 考尔德伦被誉为奇异积分大师,他的突出贡献是奇异积分理论及其在偏微分方程中的应用。奇异积分理论是一种特殊的积分变换,是一维希尔伯特变换到高维欧氏空间的推广,它是由A. P. 考尔德伦和 A. 赞格蒙于 1952 年引入的一种积分算子,故又称考尔德伦-赞格蒙奇异积分算子。他们就最基本与最典型的情形,证明了奇异积分算子的 L^p 可积性,这是奇异积分理论的奠基性工作。A. P. 考尔德伦在这方面的开拓性工作,对现代傅里叶分析及与之有关的实分析、复分析和偏微分方程都有深远的影响。由于 A. P. 考尔德伦引入奇异积分算子以后,经 E. M. 斯坦(Stein)、C. 费弗曼(Fefferman)等人,把奇异积分同哈代-李特尔伍德极大函数、面积积分、多元调和函数的边界性质、李特尔伍德-佩利理论联系起来,组成了近代调和分析的主要工具。同时由J. J. 科恩、L. 尼伦伯格和 L. V. 赫尔曼德尔等人在奇异积分理论的方法的基础上,发展出伪微分算子、傅里叶积分算子等理论,形成偏微分方程近代理论的一个重要方面。在现代数学中以 A. P. 考尔德伦的姓氏命名的考尔德伦-赞格蒙解也是很重要的。1952 年 A. P. 考尔德伦和 A. 赞格蒙在他们的奠基性论文中,把函数 $f \in L$ 分解为 $g+b$ 两部分,其中:g 有较好的性质,例如 $g \in L^2$,故称 g 为“好的”部分;而 b 是“坏的”部分,但具有某些特殊性质,如在某些方块上的积分为 0,这就是通常所说的考尔德伦-赞格蒙解。在此基础上,以后发展出一整套实变函数论方法。奇异积分算子理论和这一整套的实变函数论方法,不仅在近代调和分析和偏微分方程的理论中,而且在多复变函数论、概率论和位势理论中,起着重要的作用。他们还引入了所谓“考尔德伦-赞格蒙核”的

概念,这个概念也是很重要的。特别是以 A. P. 考尔德伦的姓氏命名的考尔德伦表示定理是调和分析中一个十分重要的结果,它是对函数空间进行原子分解的有效工具,也是近年来颇受数学界关注的小波理论的先导。

对于偏微分方程的初值问题,A. P. 考尔德伦于 1958 年证明了:T. 卡莱曼(Carleman)的惟一性定理可以推广到自变量的个数多于两个的情形。也就是说,对于 k 阶线性方程

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}+\sum_{j=1}^{k}P_j\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^{k-j}u}{\partial x^{k-j}}\right)+B(u)=0$$

设 $P_j(\xi)$ 为 $\xi(\xi=\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的 j 次齐次多项式,B 为关于 x,y 的不超过 $k-1$ 阶的微分算子,它的系数是有界函数。还假定 $P_j(\xi)$ 的系数是 x,y 的 C^1 类函数,其导数具有赫尔德连续性,若上述 k 阶线性偏微分方程的特征方程 $\lambda^k+\sum_{j=1}^{k}P_j(\xi)\lambda^{k-j}=0$ 对任意的 $\xi\neq 0$ 具有 k 个相异的根,则上述方程满足初始条件的 C^k 类解在 $x=a$ 附近局部地只有一个。但是,在阶数 $k\geqslant 4$ 的情形,当自变量只有 3 个($n=2$)时,由于拓扑学上的困难,A. P. 考尔德伦的证明没有成功。这个困难后来由日本著名数学家沟畑茂(Mizohata Sigeru)完全解决了。这个结果可以在类似的假设下推广到方程组。对于椭圆型偏微分方程,A. P. 考尔德伦在柯西问题解的惟一性方面作了推广。关于巴拿赫空间,他和其他数学家分别得到:设 X_0,X_1 是巴拿赫空间,$F(X_0,X_1)$ 是所有满足下列条件的函数 $f(\zeta)(\zeta=\xi+i\eta)$ 所组成的空间;$f(\zeta)$ 在带形 $0\leqslant\xi\leqslant 1$ 中有定义,取值于 X_0+X 中,在 $0<\xi<1$ 内全纯,在 $0\leqslant\xi\leqslant 1$ 上连续且有界,并使得 $f(i\eta)$ 是一个取值于 X_0 中的连续有界函数,$f(1+i\eta)$ 是一个取值于 X_1 中的连续有界函数。$F(X_0,X_1)$ 在范数

$$\|f\|_{F(X_0,X_1)}=\max\{\sup\|f(i\eta)\|_{X_0},\sup\|f(1+i\eta)\|_{X_1}\}$$

之下,是一个巴拿赫空间。

A. P. 考尔德伦于 1978 年在赫尔辛基国际数学家大会上提

出了下述一个重要猜想：设 K 是复平面内的紧集，复值函数 $A(x)$ 满足

$$\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\in K, \forall \text{ 实数 } x,y,x\neq y,$$

又设 $F(z)$ 在 K 的一个邻域内解析，则

$$C(f)(x) = \mathrm{P.V.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right)\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y$$

是 L^2 上的有界算子。

1981 年，A. 麦金托什(Mcintosh)等人用多线性算子理论得到 $\|C_k\|\leqslant B_0(1+k)^4\|A'\|_{\infty}^{k}$，$\forall K$，从而使 K 为凸时的考尔德伦猜想获证。稍后，G. 戴维斯(Davis)从 A. P. 考尔德伦 1977 年的估计(即在 $\|A'\|_{\infty}$ 小的条件下，证明了 $C(f)$ 的 L^2 有界性)出发，用实方法去掉了 K 的凸性限制。20 世纪 80 年代前期一些数学家还将 F 的全纯性也减弱为 C^{∞} 性质。

在分析中，关于李普希兹曲线的柯西积分的正则性条件是一个历史悠久的问题，A. P. 考尔德伦和其他人使用了近年来发展起来的哈代空间技术与处理具有"粗糙"系数的奇异积分的最新方法，成功地解决了这个问题，而且非常有可能将这些思想应用于偏微分方程许多重要问题之中。

A. P. 考尔德伦对遍历理论颇有建树。遍历理论起源于所谓遍历性假设，这个假设是作为经典统计力学的基础由 L. E. 波耳兹曼(Boltzmann)和 J. W. 吉布斯在 19 世纪末提出来的。现代遍历理论的主要对象是研究可测变换，特别是具有一个不变测度变换法则。在遍历理论中，对于可测变换 φ，一个有限不变测度的存在性与遍历定理，特别是平均遍历定理的成立与否是密切相关的。例如，对于每个满足 $m(E)>0$ 的集 E，$\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n-1}m(\varphi^k E))/n$ 存在且为正，是对于双可测的 φ 存在一个有限的不变测度的充分必要条件。A. P. 考尔德伦指出，下面条件的每一个都是充分必要的：

(i) $m(E)>0$ 蕴涵

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}m(\varphi^k E)\right)>0$$

(ii) $m(E)>0$ 蕴涵

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}m(\varphi^k E)\right)>0$$

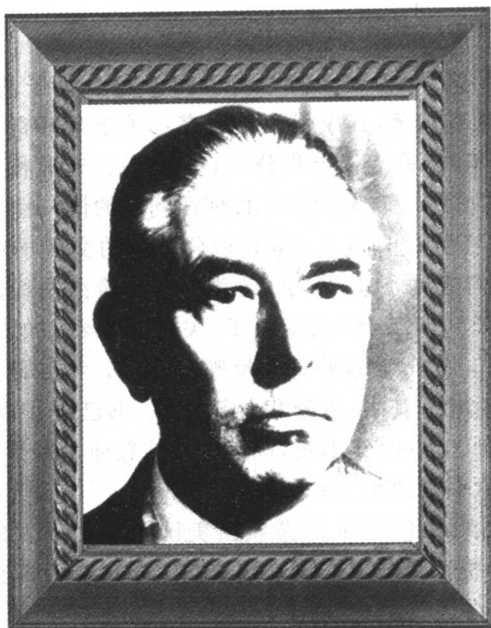
A. P. 考尔德伦围绕奇异积分和奇异积分算子的有关问题，发表了一系列的论著，其中代表性的有:《关于某些奇异积分的存在性》(1952 年)、《关于奇异积分》(1956 年)、《奇异积分算子和偏微分方程》(1957 年)、《偏微分方程柯西问题的惟一性》(1958 年)、《奇异积分算子》(1960 年)、《奇异积分算子的交换子》(1965 年)、《奇异积分算子代数》(1966 年)、《关于李普希兹曲线的柯西积分及其相关算子》(1977 年)、《交换子、关于李普希兹的奇异积分及其应用》(1980 年)等。这些论著反映了 A. P. 考尔德伦在这个领域内的杰出贡献。其中《奇异积分算子》一书已被译成中文，由上海科技出版社于 1964 年出版，该书精练地叙述了奇异积分算子的基本性质和它对双曲型方程的应用。

A. P. 考尔德伦 1979 年荣获由美国数学会颁发的博彻纪念奖，表彰他在奇异积分理论和偏微分方程方面的基本工作，特别为表彰他 1977 年发表的论文《关于李普希兹曲线的柯西积分及其相关算子》。1989 年他荣获美国数学会颁发的斯蒂尔奖中的重大贡献奖。1991 年荣获美国国家科学奖章。

“A. P. 考尔德伦的为人，正像他作为一名数学家一样有独特的一面，……他是一位热情而友善的人；他富于幽默感，又特别谦虚；最重要的是，他拥有最伟大的内在的毅力和人格。他是一个令人惊奇的人，他通过他的数学研究影响了许多人，他将被他朋友以及曾经受他慷慨相助的人铭记在心和深深地怀念。”[159]

A. P. 考尔德伦 1998 年 4 月 16 日逝世，终年 77 岁。

E. 德乔吉
(De Giorgi,Ennio)



“……推广了经典的伯恩斯坦定理,它乃是 E. 德乔吉($n=3$)、F. J. 阿姆格伦德($n=4$)、J. 西蒙斯($n=7$)、E. 邦别里、E. 德乔吉、E. 朱斯蒂($n\geqslant 8$)的联合努力。”[97]

——陈省身

“数学的思维与想像是无边际的,而另一方面,现实世界是由可察见与不可察见的事物构成的,而数学是惟一的那种科学,它能由可察见的事物的观察通向对不可察见的事物的想像,这可能正是数学力量的奥秘。”[127]

——E. 德乔吉

E. 德乔吉是意大利数学家,1928 年 2 月 8 日出生于意大利莱切。

由于他在偏微分方程和变分法领域更新观念和取得的重大成果,荣获 1990 年沃尔夫数学奖,时年 62 岁。

E. 德乔吉早年就读于罗马大学,1950 年获该校数学学位。

1951 年起在罗马计算应用学院工作。1958 年任麦西拿大学教授。自 1959 年起,他一直在意大利比萨高等师范大学任代数和微积分学教授。他是罗马 Lincei 科学院院士。

E. 德乔吉的工作被认为属于偏微分方程和变分法理论中很重要和极富创造性的成就之列。在他刚开始作研究的时候,数学家们对于处理两个变量的二阶非线性椭圆型方程还一筹莫展。E. 德乔吉的第一个重要的突破是在 1957 年,当时他证明了散度形式的二阶椭圆型方程的解具有赫尔德连续性。他对赫尔德常数估计的工作也是很有价值的。他的这些成就为研究线性方程

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(x)u_{xj} + a_i(x)u] + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

的广义解及其导数的高次方可积性、有界性和赫尔德连续性奠定了基础。

E. 德乔吉开创了多维线性方程研究的新阶段。首先面向多维非线性问题"整体范围"研究的是 1956—1958 年 E. 德乔吉等人的工作,尽管在此以前曾有不少数学家做过这类工作,但只考虑了这种或那种意义下接近线性的各类拟线性方程。其中关于非线性变分问题古典可能性的惟一的、卓有成效的效果,就是 E. 德乔吉和 J. F. 纳什(Nash)关于最简单泛函 $\int_{\Omega} F(u_x)\mathrm{d}x$ 的工作,这里对 F 所做的假定是

$$\nu\xi^2 \leqslant F p_i p_j(p)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2$$

其中 ν 和 μ 是与 $p=(p_1,\cdots,p_n)$ 和 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 无关的正常数。

E. 德乔吉最大的贡献是关于极小曲面的正则性理论，他研究了在高维欧几里得空间中构造极小超曲面的问题。极小曲面是面积在法向变分下达到临界值的曲面，也即平均曲率为零的曲面。极小曲面的问题起源很早，19 世纪的比利时物理学家 J. A. F. 普拉托(Plateau)长期以来对肥皂泡进行了大量的研究，他把金属丝圈成各种封闭的曲线形状，浸泡在肥皂水或甘油溶液中，当金属丝圈被拉出来时，在金属丝圈上就张上一层肥皂薄膜。由于表面张力的作用，在同一边界曲线上张成的曲面是所有可能的曲面中面积最小的，在数学上称为极小曲面。很自然，对于任意的封闭空间曲线，张在它上面的极小曲面是不是都存在，就成了数学家们首先关注的问题，这就是所谓普拉托问题。普拉托问题之所以有名，是因为历代大数学家，诸如 G. F. B. 黎曼、K. T. 外尔斯特拉斯等人，都曾试图去解而没有取得成功。因为所涉及的偏微分方程是非线性的(是一个非线性的椭圆型边值问题)，解起来要比线性方程难得多。1931 年 1 月，美国数学家 J. 道格拉斯(Douglas)发表了关于普拉托问题的完全解，从而荣获 1936 年度菲尔兹奖。但 J. 道格拉斯等人的解法还遗留下来一个问题，即他们的解是不是有奇点。另外，J. 道格拉斯的工作集中于 3 维空间的曲面，从数学上来讲很自然地会考虑推广到高维空间或高维流形的 k 维子流形上。E. 德乔吉等人首先证明：当 $n=1,2,3,4,5,6$ 时，$n+1$ 维欧几里得空间中的一类 n 维极小曲面没有内奇点，但对于 $n=7$ 时却百思不得其解。后来，E. 德乔吉与比萨大学的数学家 E. 邦别里(Bombieri，1947 年菲尔兹奖得主)合作研究，终于发现了 $n=7$ 时可以有一个奇点。这种从 7 开始的质变使数学家们十分震惊。据说，这个结果是 E. 德乔吉和 E. 邦别里等人在 1968 年的某日一直研究到深夜才得出来的。同一天晚上，他们还对 $n=8$ 的伯恩斯坦猜想提出了一个反例。伯恩斯坦曾猜想，有大范围定义域 (R^n) 的 R^{n+1} 中的曲面，如果是极小曲面那就是超平面。虽然德乔

吉等人在 60 年代前期就陆续证明了对 $n \leqslant 7$ 时伯恩斯坦猜想是成立的，却在 $n>7$ 的情形受阻。终于这天晚上，他与 E. 邦别里等人搞出了一个反例：找到一个以 R^8 为定义域的 R^9 中的极小曲面不是超平面，即他们得出：伯恩斯坦猜想当 $n>7$ 时不真。这个结果，对于理解某一类偏微分方程解空间的几何性态，是极为重要的。它与十年前 J. W. 米尔诺发现七维球这个微分拓扑学的奠基性事实，也许是惟一可以相提并论的涉及维数间断性的例子。关于极小曲面及其在高维波形的推广，陈省身、项武义、丘成桐等都做出了重要贡献。

E. 德乔吉与 E. 邦别里还得到：设

$$Z = Z(X_1, \cdots, X_n) > 0, X_1^2 + \cdots + X_n^2 < r^2$$

为 E^{n+1} 中的极小超曲面，E^{n+1} 具有坐标 $(X_1, \cdots, X_n, Z)$，则有不等式

$$|(\mathrm{grad} Z)_0| \leqslant C_1 \exp\left(C_2 \frac{Z(0)}{r}\right)$$

此处，C_1, C_2 为只依赖于 n 的常数。

这个结果是关于极小超曲面最深刻的结论之一。

E. 德乔吉还独立得到：若 D 是有界域，D_1 是 D 的紧子集，它的线性豪斯道夫测度为零，那么在 $D-D_1$ 内极小曲面方程的每个解就能扩充为在整个 D 内的解。

E. 德乔吉得出极小超曲面除了一个余维数至少是 2 的闭子集以外是解析的。

E. 德乔吉在获得上述关于极小超曲面的正则性理论中，主要运用了几何测度理论以及连同一个相关的关键性紧性定理。所谓几何测度论，就是高维空间中低维点集的测度及低维点集上的积分理论。20 世纪初测度论的建立，使得人们对 R^n 中的子集关于 n 维勒贝格测度 μ_n 的性态有了很好的了解。函数论的很大部分由于勒贝格积分论而产生了巨大的变化。但是在处理与 R^n 中低维点集有关的数学问题时遇到了困难。例如上面谈到的普拉托问

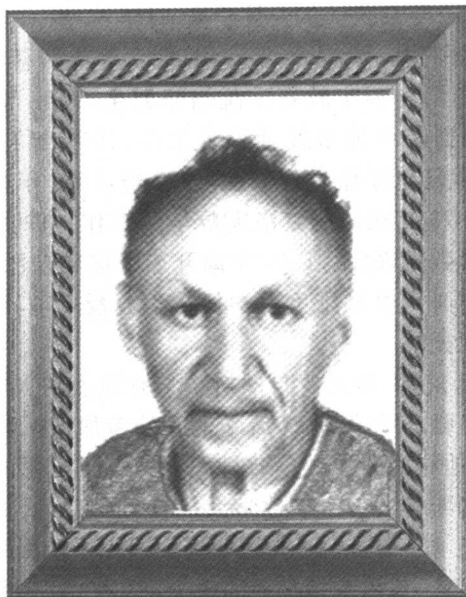
题,在2维曲面时尚可以结合共形变换和狄利克雷原理巧妙地应用勒贝格方法而解决,而在曲面的维数超过2时,这些经典的方法就无能为力了。几何测度正是在这些背景下应运而生的。它是由希腊数学家C. 卡拉西奥多里(Carathéodory)在研究经典的测度论的基础上于1914年开创的。经过半个多世纪的发展,融合了分析,几何、代数拓扑中的许多技巧,产生了许多新的概念、理论,现已成为数学中的一个有力工具。E. 德乔吉对几何测度论很有见地,并运用它解决了不少问题。E. 德乔吉还给出了有限周长的概念和它的性质。

E. 德乔吉在比萨高等师范大学形成了以他为首的著名学派,这个学派对偏微分方程、极小超曲面、几何测度论、变分法等做出了一系列举世公认的成就。

谈到研究数学的体会时,E. 德乔吉曾说:"我给每个人的忠告是:毫无拘束地畅想,但同时要和你的朋友们及其他人交流学术思想活动,这种交流必须是简明地、清晰地,而不是模棱两可地,这样你就会切实看清你是否给你的思路找到了正确的形式。"[127]

E. 德乔吉于1996年10月25日逝世,终年68岁。

I. 皮亚捷茨基-沙皮罗
(Piatetski-Sapiro, Ilya)



"在几乎 40 年的数学研究生涯里,I. 皮亚捷茨基-沙皮罗教授一直做着重要的贡献。他解决了一些著名的悬而未决的问题,并且在自守函数理论以及它同数论、代数几何、李群的无限维表示的联系中引进了新的思想。"

——摘自:1990 Wolf Prizes. Notices of the American Mathematical society, 1990, 37(3):286

"我认为,在苏联的所有自然科学(也许是所有科学,其中包括理论物理)领域中,苏联的数学对世界科学贡献最大。"[7]

——I. 皮亚捷茨基-沙皮罗

I. 皮亚捷茨基-沙皮罗是以色列数学家，1929 年 3 月 30 日出生于苏联一个犹太人家庭。

由于他在齐性复域、离散群、表示理论和自守形式诸领域中的杰出贡献，1990 年荣获沃尔夫数学奖，时年 61 岁。

I. 皮亚捷茨基-沙皮罗 1946 年就读于莫斯科大学数学系，1951 年进入莫斯科列宁教育学院当研究生，1955 年获副博士学位，随后分配到卡卢加市教育学院工作，1958 年在斯捷克洛夫(Steklov)数学研究所通过了博士论文答辩，1959 年获理学博士学位。1958—1973 年在斯捷克洛夫数学所工作。1964—1972 年兼任莫斯科大学数学教授。1973 年离开苏联移居以色列。其后，他同时在特拉维夫大学和雅里大学任数学教授。1977 年起兼任美国耶鲁大学教授。

I. 皮亚捷茨基-沙皮罗自幼对数学有强烈的兴趣，11 岁时就独立推导出牛顿二项式公式，后来他开始参加莫斯科市举办的数学竞赛，这使他有机会接触莫斯科大学力学数学系的教师。1946 年他考入了莫斯科大学力学数学系，在该系他结识了当时苏联数学界的三大巨人：A. N. 柯尔莫哥洛夫、I. R. 沙法列维奇、I. M. 盖尔范德。I. M. 盖尔范德是他的硕士论文的导师，并推荐他到莫斯科的列宁教育学院攻读博士学位，1958 年又邀请他到斯捷克洛夫数学研究所从事研究工作。在某种程度上，他也是 I. R. 沙法列维奇的学生，因为他在攻读博士学位时，参加了 I. R. 沙法列维奇主持的关于自守函数的讨论班，并且后来把自守函数当作研究的主要课题，他还在 I. R. 沙法列维奇的指导下翻译了 C. L. 西格尔关于自守函数的著作。大学时起直到从事研究工作以后，他都与 A. N. 柯尔莫哥洛夫有通信联系。因此，苏联数学界的这三位巨人，对他的数学生涯与业绩都有着深远的影响。

I. 皮亚捷茨基-沙皮罗在近 50 年的数学研究生涯里，对数学做出了一系列贡献。他解决了一些著名的悬而未决的问题，并且在自守函数理论以及它同数论、代数几何、李群的无限维表示的联

系中引进了新思想。在最近40年有关这个理论所出现的重大进展中，他的工作一直占重要地位并起着积极作用。他的主要成就有：解决了关于函数的三角级数展开式的惟一性的塞勒姆问题。在关于傅里叶级数惟一性理论中，他把 H 集推广到 $H^{(m)}$ 集。在齐性域中，引进西格尔域的概念，并证明了任何有界齐性域均解析等价于由他所定义的西格尔域。鉴于西格尔域的实现相当明确，他的这一结果使有界齐性域分类问题取得了重要进展。将对称域在解析等价意义下加以分类，是E. 嘉当的重大贡献，而I. 皮亚捷茨基-沙皮罗的工作，特别是他提供了维数为4的非对称齐次域的例子，并进而解决了嘉当问题和所有有界齐性域的完全分类（同E. 文伯格（Vinberg）和G. 金迪金（Gindikin）合作）。他与I. R. 沙法列维奇合作对哈塞猜想"当 V 为奇异 K_3 曲面，即具有20个独立极化的 K_3 曲面"情形给出了证明，进而解决了对于 K_3 曲面的托雷里问题。他对A. 赛尔贝格提出的"除某些例外，格子群也都是算术群"的猜想作了完善和拓广，并解决了这个猜想的一个特别情形，从而为离散群理论的重要进展铺平了道路。他对作用在有界对称域上的算术不连续群的情形建立起了自守函数的统一理论。在酉表示中，有以他的姓氏命名的盖尔范德-皮亚捷茨基-沙皮罗的互反律"若 G 是连通半单李群，Γ 是 G 的离散子群，则在 Γ/G 上的正则表示 T 中，不可约酉表示 U 的重数，等于型 U 的所有自守形式构成的线性空间的维数。"他还对广义艾森斯坦级数的解析性质及函数方程作了深入研究。另外，他还证明了自守函数理论的许多结果，例如这一理论推广到半单李群的一般情况（与I. M. 盖尔范德合作），在有界对称域上的算术群的一般理论，对于 $GL(3)$ 的第一"逆定理"，关于所有典型群的自同构表示 L 函数的构造（同S. 罗利斯（Rallis）合作），以及关于任意大维数的双曲空间里的非算术格的存在的证明（同M. 格罗莫夫（Gromov）合作）等等。

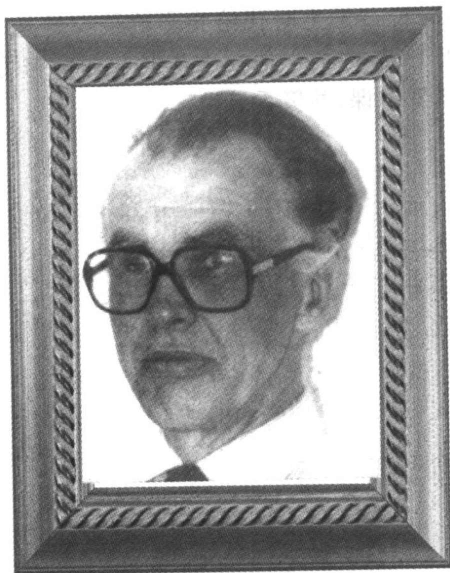
I. 皮亚捷茨基-沙皮罗在对苏联的数学研究发表评论时说：

“苏联的纯数学在世界上享有盛誉。”[7]在荣获国际数学界最高奖——沃尔夫奖的数学家中，在他之前就有三位是前苏联人，即I. M. 盖尔范德、A. N. 柯尔莫哥洛夫、M. G. 克列因。他认为前苏联数学取得巨大成就有下列几个原因：“首先，苏联数学学派的兴起是革命前俄国数学学派的自然延续，……苏联数学学派继承了居于世界前列的俄国数学学派——罗巴切夫斯基和切比雪夫学派的传统和标准。其次，革命使得许多有才智的年轻人能够接受高等教育，而在革命前，这是他们做梦都不敢想的。I. M. 盖尔范德是一个突出例子，革命确实为他打开了通向数学世界的大门。这些出色的人物使得苏联数学学派更加强大。另外，苏联政府对数学家相对是比较宽容的。……例如，1937 年当‘恐怖’达到顶点时，《真理报》上刊登了一篇文章，指控 N. N. 卢津院士为‘人民的敌人’，然而 N. N. 卢津并没有遭受逮捕，在作了适当的自我批评之后，仍继续当他的数学教授和科学院院士。”[7]“总之，由于俄国和苏联数学发展的连贯性，由于新的天才人物不断涌现，也由于苏联政府对数学家的重视，今天苏联数学依然具有很高的水准，居于世界前列。”[7]“但是另外两个因素又阻碍了苏联数学的发展，损害了它的国际声誉，这就是歧视犹太人和大量的犹太科学家移居国外……在 1972—1982 年的十年间，总数为 25 万的苏联犹太人移居国外，其中许多是专业人员，包括数千名数学家，……使苏联数学受到沉重打击，也损害了它在国际上的形象，……另一个不可挽回的损失是专门为天才儿童开设的莫斯科第二数学专门学校的衰退，它的毕业生有的已经成长为重要的数学家。但是由于该校的大多数教师和许多学生移居国外，该校已失去了它原先的面貌，而出国的教师也没能在西方重建类似的学校。”[7]“但是从总的来说，我认为苏联有可能克服目前的挫折，……首先，苏联数学的水平仍然是很高的，它所享有的声望能吸引众多才华横溢的学生，……其次，苏联数学家很重视和国外的交流，也很关心他们在国外的声誉。他们尽一切努力使苏联数学的研究更吸引人。”[7]他还

说:“我认为,在苏联的所有自然科学(也许是所有科学,其中包括理论物理)领域中,苏联的数学对世界科学贡献最大。”[7]

1990 年度菲尔兹奖得主之一 V. 德里费尔德(Drinfeld)在得奖后接受采访时说:“学生时代给我影响最大的是 Yu. I. 马宁与 I. 皮亚捷茨基-沙皮罗。”[93]他在大学时曾非常努力地听过 I. 皮亚捷茨基-沙皮罗讲课,并极受启发。

L. 卡尔森
(Carleson, Lennart)



"在古典分析的新工具中不能不提到泛函分析的直接和间接影响。对日冕(Corona)问题……以及最近流行的L. 卡尔森测度等课题的强烈兴趣明显地说明了这一点。我对这些课题的进展有着浓厚的兴趣,但是最好还是让我们的年轻的同事们去作这些课题未来的研究吧。"[25]

——L. V. 阿尔福斯

"我们已看到实分析与复分析的思想如何交织在一起,并给出深刻而瞩目的新结果,其主要工具是奇异积分及傅里叶积分。……我们正面临多复变量的一套全新的理论开端。"[106]

——L. 卡尔森

L. 卡尔森是瑞典数学家。1928 年 3 月 18 日生于斯德哥尔摩。

由于他在傅里叶分析、复分析、拟共形映射及动力系统理论方面的重要贡献,1992 年荣获沃尔夫数学奖,时年 64 岁。

L. 卡尔森 1947 年毕业于乌普萨拉大学。1950 年获博士学位。1950—1951 年在美国哈佛大学作研究,后回乌普萨拉大学任助理教授。1954—1955 年任斯德哥尔摩大学教授。1955 年起任乌普萨拉大学教授。1968—1984 年曾任米塔-列夫勒(Mittag-Leffler)研究所所长。1986 年兼任美国加州大学洛杉矶分校教授。他是瑞典科学院院士及苏联、丹麦、挪威、芬兰、匈牙利等科学院外籍院士。他 1978—1982 年任国际数学联合会主席。

L. 卡尔森是一位才华横溢的数学家,1952 年他在其母校乌普萨拉大学任助教期间,所发表的关于各种函数的惟一性集理论是这一领域的重大突破。他引进了卡尔森集,卡尔森集构成了所谓薄集(thin set)的重要一类,从而使他崭露头角。1961 年,他还对关于容量与豪斯多夫测度的关系进行了种种研究。

L. 卡尔森对复变函数插值理论极有建树。复变函数插值的典型问题是:给了两个复数序列$\{z_i\}$,$\{w_i\}$,其中 z_i 互不相同,研究在什么条件下存在 $f(z)$(有一定的分析性质),使 $f(z_i)=w_i(i=1,2,\cdots)$。这里,$\{z_i\}$经常位于复平面上的某个区域 G 中(G 也可以是全平面)。对于函数 $f(z)$除了解析性以外,还可要求满足一些其他的条件。例如,设 G 是$|z|<1$,$|z_i|<1$,可以要求 $f(z)\in H^p,0<p\leqslant\infty$。R. H. 奈望林纳(Nevanlinna)在 H^∞ 中考虑这个问题,给出了加在$\{w_i\}$上的一个充要条件,但是这个条件很不实用。1958 年 L. 卡尔森用求极值的方法给出了一个容易判别的充要条件:

$$\inf_{i\geqslant 1}\prod_{j\neq 1}\left|\frac{z_j-z_i}{1-z_j z_i}\right|>0$$

他还给出了一个存在性的证明,其方法相当复杂。

在函数代数理论中,设 A 是函数代数,m 是 A 上的一个乘法

正测度，对于 $1 \leqslant p < \infty$，哈代(Hardy)类 $H_p(m)$ 定义为 A 在 $L_p(m)$ 内的闭包，而对 $p_\infty(m)$ 是 A 在 $L_\infty(m)$ 内的弱 * 闭包。在古典 H_∞ 类中，有所谓日冕问题："开圆盘是否在 H_∞ 的极大理想空间内稠密?"L. 卡尔森在 1962 年发表的论文中作了肯定的回答，从而成功地解决了日冕猜想。它等价于下述事实：设 f_1，f_2，…，f_n 是 H_∞ 内的函数，满足 $|f_1|+|f_2|+\cdots+|f_n| \geqslant \varepsilon > 0$，则存在 $g_1, \cdots, g_n \in H_\infty$，使得 $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$。L. 卡尔森还引出了卡尔森测度、日冕构造等一系列新概念和新方法。

傅里叶分析，又称调和分析，是 18 世纪以后分析学中逐渐形成的一个重要分支。傅里叶分析从诞生之日起，就围绕着"f 的傅里叶级数究竟是否收敛于 f 自身"这样一个中心问题进行研究。当 J. B. J. 傅里叶提出函数可以用级数表示时，他的想法还没有得到严格的数学论证，实际的情形人们并不清楚。P. G. L. 狄里克雷(Dirichlet)是历史上第一个给出函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛于它自身的充分条件的数学家。他证明了在一个周期上分段单调的周期函数 f 的傅里叶级数，在它的连续点上必收敛于 $f(x)$；如果 f 在 x 不连续，则级数的和是 $\frac{[f(x+0)+f(x-0)]}{2}$。1913 年俄国数学家 H. H. 卢津(Lusin)在他的一篇论文中，提出了如下的猜想：区间 $[0,2\pi]$ 上平方可积函数的傅里叶级数，在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处收敛。H. H. 卢津的这个猜想发表之后，引起了世界上许多一流数学家的关注。在长达 53 年中，这个猜想既不能被证实，也无法被否定。例如，1923 年 A. N. 柯尔莫哥洛夫构造了一个可积函数，它的傅里叶级数几乎处处发散，1926 年他又发现了一个傅里叶级数处处发散的可积函数。但是这两个可积函数都不是平方可积的。因此，卢津猜想不能被否定。从肯定方面来接近卢津猜想的，则有 1925 年 A. N. 柯尔莫哥洛夫、Γ. A. 谢利维奥尔斯托夫和 A. 普莱斯纳(Plessner)的工作，但他们的工作离证实卢津猜想仍有很大的距离。在以后的 40 多年中没有什么显著进

展。基于上述 A. N. 柯尔莫哥洛夫的反例,在相当一部分有影响的数学家中,逐渐产生了否定卢津猜想的倾向。例如,1946 年在纪念美国普林斯顿大学建校 200 周年举行的数学问题讨论会上,A. 赞格蒙(Zygmund)就认为,在三角级数理论方面提出猜想,根据历史的经验,往往是要失败的。他提出,甚至连续函数的傅里叶级数是否必有收敛点都还不清楚,他是从否定卢津猜想的角度来考虑的。其后,卢津猜想则变成两个带有倾向性的正反两方面的问题:一方面,是否存在连续函数,它的傅里叶级数在某个正测度的点集上发散?另一方面,是否所有连续函数的傅里叶级数都几乎处处收敛?把问题集中到连续函数,这就反映了一定程度的倾向性,即认为原来的卢津猜想未必成立。可是对卢津猜想的研究仍没有多大进展。直到 1959 年,A. P. 考尔德伦(Calderón)指出,如果一切平方可积函数 f 的傅里叶级数的部分和序列 $S_n(f,x)$ 几乎处处收敛,那么以下的不等式应当成立:

$$\mathrm{mes}\{x\in[0,2\pi]\ \sup_n|S_n(f,x)|>\lambda\}\leqslant C\|f\|_2^2/\lambda^2(x>0)$$

mes{…}表示点集的勒贝格测度,$\|f\|_2^2=\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x$,$C$ 是绝对常数。1966 年,L. 卡尔森利用哈代-李特尔伍德(Hardy-Littlewood)极大函数和 A. P. 考尔德伦的上述原理,极其巧妙地划分区间,以十分精巧的数学论证,证实了卢津猜想,轰动了数学界。L. 卡尔森还更进一步指出:若 $f\in L_p(1<p<2)$,则在几乎所有点处,有 $S_n(x)=o(\lg\lg\lg n)$,并且若 $f(\lg^+|f|)^{1+\delta}\in L_1(\delta>0)$,则在几乎所有点处,有 $S_n(x)=o(\lg\lg n)$。

L. 卡尔森 1972 年证明了:在二维情形,任意阶的博赫纳-里斯(Bochner-Riesz)均值都 L^p 有界($4/3\leqslant p\leqslant 4$)。1974 年他证明 R^3 的拟共形自映射可扩张成 R^4 的拟共形自映射,他的方法经改进后已推广到高维。20 世纪 80 年代他和本尼迪克斯(Benedicks)引进研究映射 $x\to(1-ax)^2$ 的混沌行为的新方法,并于 1988 年证明了亨诺(Henon)映射:$(x,y)\to(1+y-ax^2,bx)$ 对于非空(甚至

正测度)参数集均展示“奇异吸引子”。他们关于亨诺 n 族的工作是带有突破性的。

L. 卡尔森在值的分布理论中还得出下述定理:设紧集 E 是康托尔(Cantor)集,l_n 是在定义 E 时经过 n 次操作所剩下的线段的长,令 $\xi_n=2l_n/l_{n-1}$,则以 E 为奇点集的任意单值亚纯函数的皮卡(Picard)例外值的个数,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$ 则不超过 3;若 $\xi_{n+1}=o(\xi_n^2)$,则不超过 20。

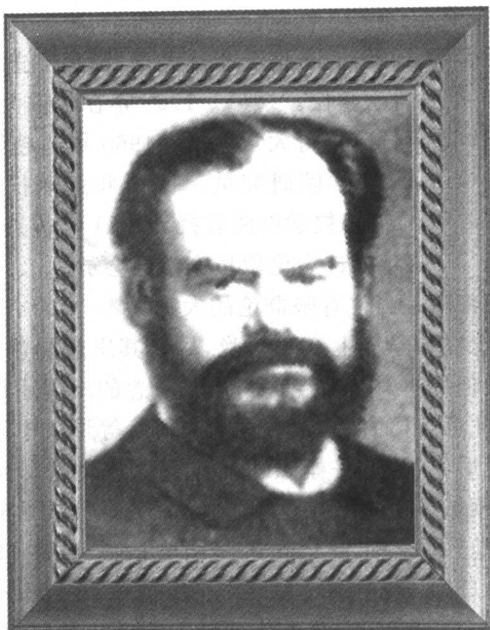
L. 卡尔森在信息论中,对于研究信道的传输容量的有关问题也做出了贡献。

L. 卡尔森对分析学极有见地。他指出:“1940—1950 年间,经典分析学曾一度被认为已经死寂,对于分析学的未来展望认为只是着意于推广的抽象分支。但现今已显明,经典分析死亡的谣言是被大大地夸张了,并且在 1966—1970 年间,分析学是数学中最成功的领域之一,其原因我想可以简单地归结为:把处理调和分析、复分析及微分方程的方法融合在一起;发现了推广到多个变量的正确途径,并且认识到在很多问题上复杂性不可避免,同时,周密的综合论证常常只是问题的中心,而不是完美的理论的全部。……我们已看到实分析与复分析的思想如何交织在一起,并给出深刻而瞩目的新结果,其主要工具是奇异积分及傅里叶分析。众所周知,这些工具也和通常偏微分方程有密切的关系,因为傅里叶变换以代数形式反映导数。……我们正面临多复变量的一套全新的理论的开端。……在一个复变量的情形,调和函数是重要的工具。”[106]

L. 卡尔森 1983 年曾以国际数学联合会主席的身分应邀来我国访问,并与中国数学会领导商讨中国数学会加入国际数学联合会的方案等问题。

L. 卡尔森 1984 年荣获美国数学会的斯蒂尔奖的重大成就奖。他的著作《例外集问题选》(*Selected Problems on Exceptional Sets*)是一本名著。

J. G. 汤普森
(Thompson, John Griggs)



"在有限单群理论中，最重要的论文可能要数 J. G. 汤普森的'*N* 群论文'。这组论文在 1968—1974 年间分成六个部分陆续发表。……虽然'*N* 群论文'本身并不属于有限单群的分类问题，但它为局部群论引进了许多重要技巧。"[107]

——M. 阿施布歇尔(Aschbucher)

"我自身的经历说明有限群理论是有魅力的。"[107]

——J. G 汤普森

J.G. 汤普森是美国数学家，1932 年 10 月 13 日生于堪萨斯州鄂大瓦。由于他对有限群论及其他数学分支的联系的所有方面的突出贡献，1992 年荣获沃尔夫数学奖，时年 60 岁。他 1970 年还荣获菲尔兹奖。

J.G. 汤普森 1955 年毕业于耶鲁大学，随后到芝加哥大学继续深造，1959 年获博士学位。1961—1962 年在哈佛大学任助理教授。1962—1968 年任芝加哥大学教授。1968 年远赴英国，任剑桥大学丘吉尔(Churchill)学院研究员。1970 年起兼任剑桥大学劳斯鲍尔(Rouse Ball)纯粹数学讲座教授。1971 年被选为美国国家科学院院士。1979 年当选为伦敦皇家学会会员。

J.G. 汤普森是当代有限群论的大师。

群的概念在数学史上产生较晚，尽管其思想的萌芽在古代欧几里得的《几何原本》中早已有之，但其概念的出现还是 19 世纪前半叶的事。此后，群的概念即在运动和变换等形式中逐步地形成，到了 19 世纪后半叶，这一概念才正式出现并迅速发展，以致很快在整个数学领域中占据了重要位置，并成为现代数学的基础之一。

有意识地开辟通向群概念道路的尝试始于 18 世纪末，当时 J.L. 拉格朗日(Lagrange)、A.T. 范德蒙德(Vandermonde)、P. 鲁菲尼(Ruffini)等试图求出高次代数方程的代数解法，(通过对方程的系数施行有限次的四则运算与开方运算表示出它的根，称为方程的代数解法。)因之作方程诸根之间的置换而注意到了群的概念。基于这种思考方法，N.H. 阿贝尔(Abel)证明了五次以上的一般的代数方程不可能代数求解。A.L. 柯西(Cauchy)用一个文字来表示置换，将群本身作为研究对象，而群与代数方程之间的关系的完全描述是 E. 伽罗瓦(Galois)1830 年左右做出的。阿贝尔和伽罗瓦的这种方程论是群论成功的开始。把群抽象化并给出其定义的是 A. 凯莱(Cayley)及 L. 克罗内克(Kronecker)。1872 年 C.F. 克莱因(Klein)在其“埃尔兰根纲领”文中强调了群论在几何学中的意义。1900 年左右，F.G. 弗罗贝尼乌斯(Frobenius)、

W. 伯恩赛德(Burnside)等人进行了抽象群的研究,特别是用矩阵来表示群的表示论的研究。这些研究现已成为有限群的基础,由此,群论开始成为数学的一个分支。群论是抽象代数学最先发展的一个部门,20 世纪 30 年代的抽象代数学的进步,便是大力推进群论思想方法的结果。从 20 世纪 30 年代后期起,有限群的研究逐步开展起来,特别是在 1955 年前后,数学家们对有限群的兴趣大大提高,并得到了丰富多彩的成果,其中 J.G. 汤普森的成果尤为显著。

具有有限个元素的群称为有限群,其所含元素的个数称为有限群的阶。J.G. 汤普森致力于有限群的研究,他的一系列工作改变了这个领域的面貌。他在 1959 年的博士论文中就证明了弗罗贝尼乌斯猜想,即若一有限群具有有限阶、无不动点自同构,则该群是幂零群,从而受到瞩目。

有限群中更有一类,叫做有限单群。在一种特定的意义下,这种群可以作为"砖块",构造出千姿百态的有限群大厦。于是,从理论上说,有限群的构造取决于有限单群的构造。20 世纪初,英国著名数学家 W. 伯恩赛德曾提出并解决了群论中的许多问题。例如,他利用群特征标证明了每一个素数次的可迁群是可解的或二重可迁的,每一个 p^aq^b(p,q 是互异的素数,a,b 是非负整数)阶的群是可解的。他发现奇数阶的群不能有非平凡的实的不可约表示,因而对每个奇数阶的群是可解的问题发生怀疑。后来有人将他的这个怀疑表述为伯恩赛德猜想,即除了只含素数个元素的循环群外,一切有限单群都含偶数个元素,或简述为"有限单群是偶数阶的。"对于这一猜想,一直到 20 世纪 50 年代都很少有人研究它,因为看不出有什么办法能有希望解决它。

J.G. 汤普森和 W. 费特(Feit)合作,娴熟地运用群论中已有的经典技巧,建立并运用了 P 局部子群方法,合作撰写了一篇题目为《奇数阶群是可解的》的论文,不仅解决了伯恩赛德猜想,而且还为局部群论引进了许多重要技巧。这篇论文长达 238 页,于

1963 年发表在《太平洋数学》杂志上。通常该杂志每期要刊载二三十篇论文，而这一期只刊载了这篇论文。换句话说，他们对伯恩塞德猜想的证明足足写了一本很厚的书！这篇博大精深的论文，不仅反映了他们的数学功底，也反映了他们的毅力。由于这篇论文极其优秀，J. G. 汤普森和 W. 费特共同获得了美国数学会颁发的科尔奖。

1968 年，J. G. 汤普森离开美国，远渡重洋到了剑桥大学。因为那里有一个很强的有限群的研究集体。J. G. 汤普森在剑桥大学期间，发表了总标题为《论其局部子群皆可解的不可解有限群》的 6 篇论文。他的这些论文，被同行誉为"有限单群理论中最重要的文献"。在有限群的研究中，他引进了许多新的思想和技巧，开拓了一系列新的研究方向。例如，在关于极小单群（即所有真子群皆为可解群）及更一般的单 N 群（即所有 P 局部子群皆为可解群）的分类定理的证明中，他完成了 P 局部子群的分析法。J. G. 汤普森的有关成果，是完成单群分类的重要组成部分。他的论文覆盖了有限群分支，而有限群论的主要发展是与对费希尔-格里斯大魔的研究联系在一起的。J. G. 汤普森和 J. 麦凯（Mckay）经过研究发现，大魔群表示的维数就是模函数 $J(T)$ 展开的系数，$J(T)$ 是用戴德金 η 函数与单李代数 E_8 的权格的 θ 函数定义的，这种观点直接将大魔群的研究与和它平行发展的无穷维李代数方面的工作联系在一起，从而使数学家们发现了无穷维李代数表示维数与 η 函数的单位元的关系，带着预想不到的结果和应用，一个新兴的数学领域产生了，它包含着原本看来相距甚远的不同分支，如物理学中的弦论和二维共形论、利奇（Leech）格的分类以及编码理论等。

编码理论最初是由美国数学家、工程师 C. F. 香农（Shanon）将通信上用的莫尔斯码和印刷电码等编码归纳成数学上的编码问题。编码理论的目的是构造适于高效率地进行信息传输的代码。而 J. G. 汤普森对编码理论颇有见地。

大家知道，空间一切直射变换构成直射群，一切直射变换和对

射变换构成射影群。射影群中有许多重要子群。J. G. 汤普森利用他掌握的有关群论的知识探讨了射影平面的有关理论，促进了不存在 10 阶射影平面的证明。

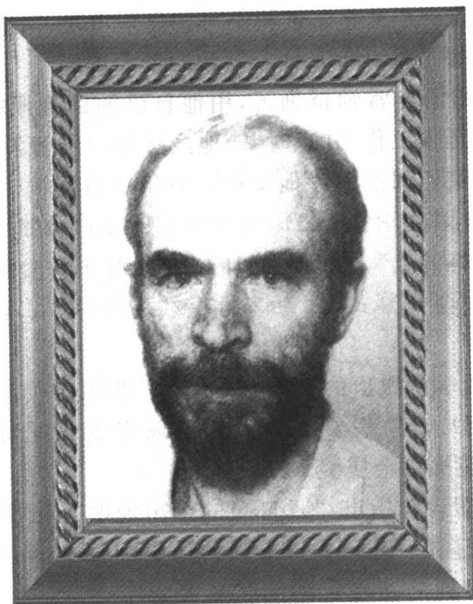
J. G. 汤普森还从希尔伯特不可约定理出发，构造出了数域的伽罗瓦群，取得了近百年来这一领域的最大进展。

J. G. 汤普森非常勤奋刻苦，用他自己的话来概括，他的生活准则是"每天至少工作 10 小时"。他虽然是一位著名数学家，但为人谦逊，数学家们都愿意和他交往。对组织有限群论研究做出过重大贡献的美国数学家 R. D. 布劳尔(Brauer)曾赞誉 J. G. 汤普森"是一位质朴的人"，并欣然在 1970 年 9 月 1 日法国尼斯举行的国际数学家大会开幕式上，为该届菲尔兹奖得主 J. G. 汤普森的成就作介绍。

由于对数学所做出的杰出贡献，除了菲尔兹奖以外，J. G. 汤普森还于 1982 年荣获了伦敦数学会颁发的贝里克大奖，并于 1992 年荣获庞加莱金质奖章。

J. G. 汤普森曾指出："我自身的经历说明有限群理论是有魅力的。"[137] 他还说："我不知道未来的达尔文(Darwin)会不会把我们费尽心力得到的一些定理用某一概念统一起来。如果统一的话，稀疏群无疑将是统一的聚合点之一。我认为把稀疏群仅仅看做是异类，从美学的角度来讲，这是令人生厌的。"[137]

M. 格罗莫夫
(Gromov, Mikhael)



“受M. 格罗莫夫……及其他人新的几何思想的激励,几何群论又变得十分活跃,由此诞生了一个全新的数学领域:自动群论。这个正在迅速走向成熟的领域处在几何、拓扑、组合群论及算法理论的交叉点;整整一个世纪的数学为这个理论提供了许多思想和课题。”[109]

——B. 法布(Farb)

“我们必须在数学教育和交流数学思想方面下更多工夫。当前数学整体的容量,深度以及结构的复杂性,使得它迫切地寻找沟通不同领域之间的数学发现的新方法,并大大地改进数学思想对于非数学家的可接近性。”[141]

——M. 格罗莫夫

M. 格罗莫夫是俄国数学家，1943 年 12 月 13 日生于苏联的博克西托戈斯克。

由于他在大范围黎曼几何及辛几何、代数拓扑学、几何群论以及偏微分方程论的杰出贡献，1993 年荣获沃尔夫数学奖，时年 50 岁。

M. 格罗莫夫 1961 年入列宁格勒大学学习，1965 年毕业。1969 年获副博士学位。1973 年获博士学位，其间在列宁格勒大学做研究工作。1974 年赴美国，在美国纽约州立大学石溪分校任教。后来又去法国巴黎大学工作。1982 年起任法国高等科学院数学教授。他是美国国家科学院的外籍院士和法国科学院的国外院士。

M. 格罗莫夫对大范围黎曼几何有重要建树。黎曼几何是德国数学家 G. F. B. 黎曼在 19 世纪中叶所提出的几何理论。1854 年，他在哥廷根大学发表的题目为《论作为几何学基础的假设》的就职演说，可以说是黎曼几何的发凡。从数学上讲，G. F. B. 黎曼发展了空间概念，首先从认识到几何学中所研究的对象是一种“多重广延量”，其中的点可以用 n 个实数作为坐标来描述，即现代的微分流形的原始形式，从而为用抽象空间描述自然打下了基础。从广义相对论产生以来，黎曼几何获得了蓬勃发展，特别是 E. J. 嘉当在 20 世纪 20—30 年代开创并发展了外微分形式与活动标架法，建立起了李群与黎曼几何之间的联系，从而为黎曼几何的发展奠定了重要基础且开辟了广阔的园地，影响极为深远，由此发展了对线性联络及纤维丛方面的研究。半个多世纪以来，黎曼几何的研究也已从局部发展到整体，产生了许多深刻的并在其他数学分支和现代物理中有重要作用的结果。随着 20 世纪 60 年代大范围分析的发展，黎曼几何也成了一个有力工具。M. 格罗莫夫在大范围黎曼几何及经典微分几何中，引进了一系列极赋创见的新思想、新概念，从而使许多经典难题获得解决。例如，他早年研究黎曼流形的浸入及嵌入问题，发展了 J. F. 纳什(Nash)等人的工作。

他引入的格罗莫夫不变量联系了几何与拓扑。他还成功地用截面曲率的下界来估计黎曼流形的贝蒂数。对于接近常曲率的流形以及曲率有上下界的 Pinched 流形,他得到了许多结果。例如,他证明了曲率接近于零、直径有界的流形一定是幂零流形。除 3 维情形外,曲率介于两负值之间、体积有界的流形只有有限多种。他用几何方法解决了具有多项式增长的群的问题。他 1981 年发表的《多项式增长的群与扩张映射》是一篇重要论文。他发现,有限生成群是多项式增长,当且仅当它是几乎幂零。他对双曲群的构造使离散群理论发生了革命性的变化。他还指出:在适当的组合意义下,"大多数"群都是负弯曲群。他还与 I. 皮亚捷茨基-沙皮罗共同给出了关于任意大维数的双曲空间里的非算术格的存在性证明。

M. 格罗莫夫对软硬辛几何有深入的研究。辛几何主要是研究辛流形,它在近年来已被革新。M. 格罗莫夫证明:如果存在 R^{2n} 的半径为 r 的球 $B^{2n}(r)$ 到圆柱体 $B^2(r')\times R^{2n-2}$ 的辛嵌入,那么 $r\leqslant r'$。目前存在多种方法来构造辛容量,M. 格罗莫夫的方法基于伪全纯曲线,这一方法的原理在于把辛几何看做复几何的一种推广。特别是 1985 年,他发表的《辛流形中的伪全纯曲线》使辛几何和辛拓扑这个领域有了重大革新,成为当前的热门,包括量子上同调和镜像对称课题以及变分问题中的椭圆方法。他引入了第一个刻画辛刚性变(rigidity)的不变量。M. 格罗莫夫是研究辛几何的权威,1986 年被邀请在美国伯克利举行的第 20 次国际数学家大会上作了一小时的报告,报告的题目是《软硬辛几何》。他在报告中精辟地评介了辛浸入和嵌入,近复流形中的全纯曲线,辛几何中全纯曲线的应用等方面的成果和发展。他在报告中还强调指出:"'软'和'硬'限于对光滑流形之间映射空间几何的大范围非线性分析的框架中。研究这些空间的现代方法来自 J. P. 塞尔所探索的软同伦处理,并非此软的技巧和想法控制着这个理论。……自从微分同胚(Thom[Th])、浸入(Smale[Sm])和换球术的灵活

性使微分同胚问题本质上约化到同伦论中以来，类似的软性在微分拓扑中也已流行。不管怎样，在拓扑上发现的软性，不能够阻挡对建立在偏微分方程之上的经典硬结构的寻求。……我们认为纳什(Nash)现象在非线性函数空间庞大的软范围内完全排除了任何硬的偏微分方程结构。现在，与最基本的方程关联的全纯曲线作为广泛而完整的硬非线性理论的第一阶石而出现。"[104]

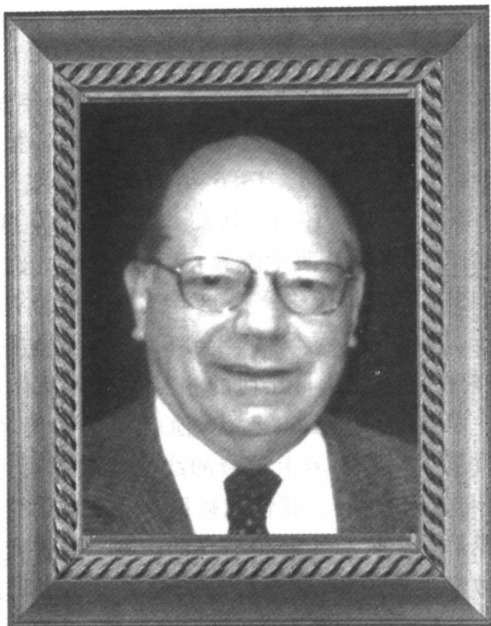
M. 格罗莫夫对未来几十年数学可能的发展趋势发表了不少深刻的见解。他说："对于世界结构中的对称性和规范性的探求，将仍是纯粹数学(和物理)的核心。"[141]"随着数学躯体的生长和发育，使数学成为其本身的逻辑分析及数学分析。这导致了数理逻辑及理论计算机科学的产生。"[141]他指出："我们必须在数学教育和交流数学思想方面下更多的工夫。当前数学整体的容量，深度以及结构的复杂性，使得它迫切地寻找沟通不同领域之间的数学发现的新方法，并大大地改进数学思想对于非数学家的可接近性，照目前的情况看，我们数学家常常对科学及工程学的现状知之甚少，而实验科学家和工程师在很多情况下未能觉察到由于纯粹数学的进步所提供的机遇。这种危险的不平衡必须通过在数学教育中渗入更多科学知识以及向未来的科学家和工程师提示核心的数学知识而加以纠正。这需要新的课程，数学家需要更加努力对更加广泛的受众传授基本的数学技巧和思想(尤其是那些在最近几十年发展起来的)。为此，我们需要创立一种能够作为纯粹数学和应用科学的中介人的新生的数学职业。多种思想的互相渗透和杂交，是科学和数学健康发展的关键。"[141]他还指出："我们必须加强对数学研究的财政投入。随着我们更多的应用计算机以及与科学和工业界的紧密合作，我们需要更多的资源去支持数学生机蓬勃的发展。即使如此，我们所需的财政支持仍大大小于科学的其他分支。数学仍然保持着最高的投入产出率，尤其是当我们在推广及应用我们的思想方面做了有意义的工作时。所以对我们来说，对数学研究的充分潜能及数学对近期及远期工业发展的关键

作用保持清醒的社会意识是至关重要的。”[141]

由于M. 格罗莫夫对数学做出的杰出贡献，他先后荣获多项奖：1971年荣获莫斯科数学会奖；1981年荣获美国数学会维布伦奖（表彰他在联系黎曼流形的拓扑性质和几何性质方面的工作）；1984年荣获法国科学院的E. 嘉当奖；1989年荣获UAP奖；1997年荣获美国数学会的斯蒂尔奖中重大贡献奖，主要是表彰他1985年发表的重要论文《辛流形中的伪全纯曲线》。

J. L. 蒂茨

(Tits, Jacques Léon)



“J. L. 蒂茨展示了如何抽象出一种论证法，去得到一个典型单群与其他李型单群的统一证明法。”[111]

——J. F. 赫莱格(Hurleg)

“复李群的某些本质上的结构性质，过去通过超越方法或者应用分类来建立，现在可以通过纯粹代数几何学的讨论非常简单地得到证明。”[105]

——J. L. 蒂茨

J.L. 蒂茨是比利时裔法国籍数学家,1930 年 8 月 12 日生于比利时布鲁塞尔。

由于他在群的代数结构理论以及其他类群方面的先驱性和基础性的贡献,特别因其对建筑(Building)理论的贡献,于 1993 年荣获沃尔夫数学奖,时年 63 岁。

J.L. 蒂茨就读于比利时布鲁塞尔大学,1950 年获博士学位。1950—1956 年先后在瑞士苏黎世理工大学、美国普林斯顿高等研究所、意大利罗马大学访问。1956 年回到布鲁塞尔大学任教,1962 年晋升该校教授。1964—1973 年任德国波恩大学教授。1973 年起任法国巴黎法兰西学院教授。1977 年当选为巴黎科学院通讯院士,1979 年成为院士。1988 年当选为荷兰皇家艺术与科学院外籍院士。他是国际数学联合会跨世纪委员会委员。

J.L. 蒂茨在群论及其与几何的相互关系方面做出了许多奠基性的贡献。早在 20 世纪 50 年代,他就与法国著名数学家 A. 波莱尔共同发展了代数闭域上子域的线性代数群理论,特别是局部域的情形(与数论有关)。线性代数群是具有仿射代数簇结构的群。它是抽象群论与代数几何相结合的产物。线性代数群的研究更多是按代数学观点进行,而成为与李群理论相平行的一个独立学科。线性代数群理论的萌芽,可以追溯到 19 世纪末叶,当时 L. 毛瑞尔(Maurer)与 C.E. 皮卡实际上已经研究了复数域上的线性代数群,C.E. 皮卡把这些群用到线性微分方程的伽罗瓦理论中去。但是,在此以后的半个世纪中,他们的工作并未引起人们的注意,后来 E.J. 嘉当与 C.H.H. 外尔对李群与李代数进行了深入的研究,所获得的成果孕育着线性代数群理论的正式出现。20 世纪 40 年代,C. 谢瓦莱(Chevalley)与我国著名数学家段学复用李群的方法,讨论了特征为零的任意域上的线性代数群,这是线性代数群理论诞生的前奏。1955 年前后,A. 波莱尔与 C. 谢瓦莱等人提出了线性代数群的一般理论。尔后经 A. 波莱尔与 J.L. 蒂茨等人的进一步发展,形成了一个较完美的数学体系,并对基础数学

的许多领域，诸如半单李群及算术子群、典型群、有限单群、不变量理论等的发展起了重要作用。任一线性代数群必同构于某一个一般线性群的某个闭子群，这就是线性代数群这个术语的由来。J. L. 蒂茨的重要贡献，是他独立创造了沟通代数、拓扑、几何的建筑理论。他最初提出建筑这个几何结构是为了对例外复李群的存在加以几何解释。后来他进一步发现建筑理论不仅可以公理化定义，而且可以揭示群的结构性质、构造线性表示及子群的上同调等。通过建筑理论，他建立了群与几何学更为一般的、不同于 C. F. 克莱因观点的关系，即通过群的一些子群来定义几何学。他还得出建筑的分类定理。它对有限群的分类至关重要。线性代数群理论的中心问题之一，是半单群的结构与分类。J. L. 蒂茨独立地通过改变 C. 谢瓦莱的方法得出一些新的李型单群，并且建立代数群及有限单群的联系。他还展示了如何抽象出一种证法，去得到一个典型单群与其他李型单群的统一证法。20 世纪 60 年代初期，他就得到任意域上半单群或可约群的结构理论。J. L. 蒂茨还提出了更一般的 M 型几何的概念，这是一类关联几何，它与一般常识上的几何有所不同，例如，它不再把诸如子空间的东西看成点的集合，而是把它们看成独立的对象。说该点在某子空间内，我们只是认为这个点与这个子空间有着"关联"关系，因此，也许把这种几何看成一个组合结构更为适宜。M 型几何包含了所有的建筑，但还有其他的成员，这样一来，我们又得到了更为广泛的一类研究群论的几何工具。与此平行的，J. L. 蒂茨还提出"窝系"(Chamber System)的概念，这也是建筑的一个推广。近年来关于 M 型几何和"窝系"的研究已成为一个活跃的领域，由于它们与群论的密切关系，这些研究者通常本身是群论学家。J. L. 蒂茨还在考思特群、李群和微分几何及卡茨-穆迪代数等方面做出了贡献。他的工作不但丰富了数学领域，更重要的是开辟了进一步发展的道路。

J. L. 蒂茨的工作与 A. 波莱尔的工作密切相关，他对 A. 波莱尔理论有如下评论："A. 波莱尔的基本发现是复李群的某些本

质上的结构性质，过去通过超越方法或者应用分类来建立，现在可以通过纯粹代数几何学的讨论非常简单地得到证明，而且这种论证对于任何代数闭域都同样行之有效。这样一来，他就能够把诸如所有极大连通可解子群（即波莱尔群）在一个连通代数群当中彼此共轭，以及所有极大环面彼此共轭之类的性质推广到任意代数闭域上。波莱尔理论中最重要的结果是，连通代数线性群 G 关于闭子群 P 的陪集空间 G/P 是射影代数簇，当且仅当 P 包含一个波莱尔群。特别是，对于每个这样的群 G，可以一种最典范的方式对应于一个特殊的射影簇，即 G/B，其中 B 是波莱尔群。"[105] 他还与 A. 波莱尔共同合作写过多篇重要论文，其中第一篇论文题为《约化群》，该文被许多它的引用者昵称为"波莱尔-蒂茨"，它的主要目的是为了建立约化群的相对理论的基础。他们共同写的最后一篇论文，他们昵称它为"非约化群"，他们把约化群的许多结论，经过适当的改变后，推广到任意连通代数群上。

J. L. 蒂茨于 1976 年荣获庞加莱奖，他曾任 1978 年度菲尔兹奖评委并在 1978 年芬兰赫尔辛基举行的第 18 次国际数学家大会上对菲尔兹奖得主 G. A. 马尔古利斯的工作作了评介。他还在布尔巴基讨论班上报告过 M. 格罗莫夫关于多项式增长的群的工作。有趣的是，若干年之后他竟与 M. 格罗莫夫在同一年度共同荣获沃尔夫数学奖。

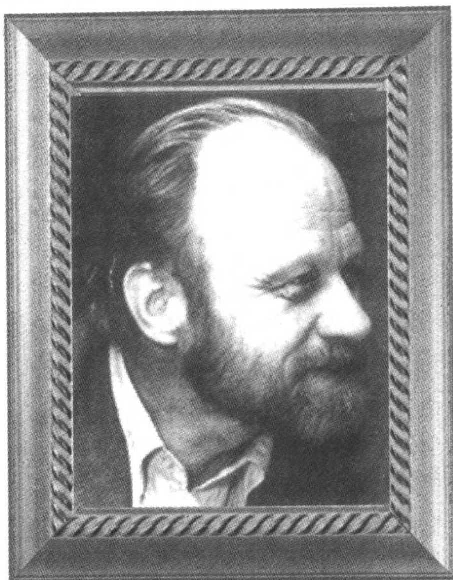
J. L. 蒂茨不但是一位杰出的数学家，而且还是一位慧眼识英才、心胸开阔的优秀教师。他在布鲁塞尔大学任教时，发现他的学生 P. 德利涅(Delige)才智过人，对布尔巴基学派编著的《数学原理》有深入的研究，并对代数几何与数论方面的问题有极大的兴趣。J. L. 蒂茨为了更好地造就这位青年，不想把这位有才华的学生套在自己身边，而是根据 P. 德利涅的兴趣和特长，极力动员并推荐 P. 德利涅到巴黎去深造，向著名数学家 J. 塞尔、A. 格罗腾迪克学习数学，从而很快使 P. 德利涅在数学上做出了一系列贡献。特别是 1973 年，P. 德利涅完全解决了著名的韦伊猜想，并于

1978 年在赫尔辛基举行的国际数学家大会上荣获了菲尔兹奖。当他们师生二人在这次盛大的国际数学家大会重逢时，不但他们两人的心情格外激动，而且也受到与会许多数学家的赞誉。

J.L. 蒂茨在 20 世纪 80 年代曾应邀来我国进行学术访问，并先后在南开大学、北京大学作过精彩的学术演讲。

J. K. 莫泽

(Moser, Jürgen Kurt)



"J. K. 莫泽发现了 C_2 中非退化实超曲面之局部标准型，并请我将他的不变量辨认为 E. 嘉当的不变量。数年前我曾将 E. 嘉当的工作拓广到 C_{n+1} 的超曲面。……J. K. 莫泽和我既给出了 C_{n+1} 中非退化实超曲面的标准型又给出了作为 CR—流形的内蕴联络，并把两个不变量集合统一起来。"[39]

——陈省身

"提炼出一个问题的本质特征，然后把它理想化，是数学的一种可靠而确实的技巧。"[112]

"对数学发现的重要性的认识往往需要较长的时间，……不幸的是，政治家们总是想要见到非常短期的效果。"[113]

——J. K. 莫泽

J.K. 莫泽是德国数学家,1928 年 7 月 4 日生于哥尼斯堡(第二次世界大战后划归苏联,今属俄罗斯)。

由于他在哈密顿力学上关于稳定性理论的奠基性工作和对非线性微分方程的深刻而有影响的贡献,1995 年荣获沃尔夫数学奖,时年 67 岁。

J.K. 莫泽 1946 年在德国哥廷根大学学习,1952 获博士学位。曾任著名数学家 C.L. 西格尔的助教并深得其教诲。1953 年赴美国纽约大学任富布赖特(Fulbright)研究员,后任助理教授。1957—1960 年任麻省理工学院副教授。1966—1980 年任纽约大学柯朗数学研究所教授,其间于 1967—1970 年任该所所长。1980 年起任瑞士苏黎世理工大学教授,1984 年起任该校数学研究所所长。J.K. 莫泽是美国、德国、芬兰、瑞典等国科学院士。1983—1986 年任国际数学联合会主席。1996 年被选为伦敦数学会荣誉会员。

J.K. 莫泽 20 世纪 50 年代就开始研究动力系统理论。动力系统理论是经典常微分方程理论的一种发展。早在 1881 年起的若干年里,J.H. 庞加莱开创了常微分方程定性理论的研究,所讨论的课题(如稳定性、周期轨道的存在及回归性等)以及所用到的研究方法都成为后来所说的动力系统这一数学分支的创始性思想。G.D. 伯克霍夫从 1912 年起的若干年里,以三体问题为背景,扩展了动力系统的研究,包括他得出的遍历性定理。在天体力学或哈密顿系统的领域中的诸多课题,特别是在遍历理论的数学研究不断深入的过程中,这一理论的最初目标(证明各种具体的哈密顿力学系统的遍历性)始终是人们最重视的问题之一。有一类哈密顿系统称为可积系统,这种系统的能量面分解成一些不变环面,每一轨道在所属的环面上运动。这样的系统不能在整个能量面上具有遍历性。原来人们以为这种情形或许是少数例外,或许经过小扰动之后就会消失。从 20 世纪 50 年代到 60 年代,J.K. 莫泽、A.N. 柯尔莫哥洛夫和 V.I. 阿诺尔德对这一情况进行了深

人研究，共同建立了以他们姓氏命名的 KAM 理论，即关于哈密顿系统方程组的解的稳定性理论。其主要经过如下：1954 年，A. N. 柯尔莫哥洛夫首先提出，对于某些力学系统，在某种意义下大多数解都是拟周期的，并指出了一个可能的解法。1963 年，A. N. 柯尔莫哥洛夫的年仅 25 岁的学生 V. I. 阿诺尔德在解析情况下完全严格地证明了这种解的存在性。J. K. 莫泽不仅同时也给出了一种特殊情形的证明，而且还以哈密顿函数存在几百阶导数的要求代替关于它解析性的假设，由此给出了光滑情况下的完整证明，从而推广了柯尔莫哥洛夫-阿诺尔德定理。他们指出：上述状况经过小扰动并不会消失，大部分不变环面仍然存在，只是形状稍有改变。他们严格证明了拟周期解的存在性，即几乎可积系统有填满不变环的拟周期解存在。KAM 理论是哈密顿系统，特别是它的定性理论的近代发展中的最重要的成就。KAM 理论还使 P. S. 拉普拉斯提出的，已历时 200 年的太阳系稳定性问题得到重要突破。KAM 理论无论从微分方程方面，还是天体力学方面来看都具有重大的贡献，在科学上有广泛应用。例如，在等离子储备系统里磁力线的特性的研究中，得到了大量应用。

J. K. 莫泽的另一个重大成就，是他证明的椭圆型及抛物型方程的哈纳克（Harnack）不等式（即正调和函数的两个值之比 $u(x)/u(y)$ 的上界和下界估计的一个不等式）以及德乔吉不等式有着重要的意义，成为线性偏微分方程的标准工具。另外，早在 1961 年，J. K. 莫泽就发现伯恩斯坦定理有如下“弱”形式，即对于任何维的空间均成立的所谓莫泽定理：极小曲面方程的每一个整解（即定义在整个 R^m 上）是一个仿射线性函数，如果它的梯度在 R^m 上一致有界。他还首先将有界平均振动函数应用于偏微分方程的光滑问题。

J. K. 莫泽在复几何、辛几何及微分几何方面有一系列重要贡献。例如：他得出分类流形的局部不变量；建立非线性索博列夫（Sobolev）不等式；用形变技术研究辛结构；发现黎曼几何的纳什

(Nash)嵌入定理所依据的基本原理以及叶状结构的稳定性等。在 20 世纪 70 年代，J.K. 莫泽与陈省身共同给予 CR 曲面(Cauchy - Riemann 曲面)的等价问题的微分几何解一个对偶的描述，它包括两个主要的结构：(1)一个有适当标架丛的嘉当联络和曲率的主丛，这个适当的标架丛如同嘉当对 C_2 所做的且等价于 N. 坦纳卡(Tanaka)的工作；(2)一个称之为"莫泽正规形式"的正规形式，它是在点 P_0 附近有非退化的莱维(Levi)形式的实超曲面的定义函数的泰勒级数的标准化，这个标准化容许一个作用在 C_n 上的有限维李群的作用，这个李群保持了 P_0 点的 M 的最佳逼近超二次型。

J.K. 莫泽在分析方法上有重大改进。例如，他在算子的微分学方面就颇有建树。从分析上研究一般算子的途径是把数学分析中研究函数的微积分学推广到算子。不满足线性条件的算子叫做非线性算子。许多非线性算子出现于非线性方程中，从而有关非线性算子的理论就围绕着非线性方程的求解的研究而开展。设 T 是从 B 空间(巴拿赫空间) X 到 B 空间 Y 的算子，设 $y\in Y$，求解 $x\in X$，满足：

$$Tx=y_0 \tag{1}$$

在算子的微分学中隐函数与反函数定理对于求解算子方程(1)有十分重要的意义。为了近似地求解方程，$f(x)=\theta$，数学分析里的牛顿求根法也被推广了。在准确解 $x^*\in U$(U 是 X 中的一个开集)的邻近任取 $x_0\in U$，构作迭代的序列：$x_{n+1}=x_n-[f'(x_n)]^{-1}f(x_n)$，$n=0,1,2,\cdots$，可以证明：$x_n\to x^*$。然而，反函数定理有时不够用，其中的条件 $f'(x_0)^{-1}\in\mathscr{L}(X,Y)$ ($\mathscr{L}(X,Y)$ 表示 X 到 Y 的线性有界算子空间)不满足。这种情形在一些微分方程理论中经常出现。例如，线性算子 $f'(x_0)^{-1}$ 不能保持值域中的函数足够光滑。为此，J.K. 莫泽修改了牛顿求根法的迭代格式，并用来推广反函数定理。由此发展起来的一套技巧在好几个重要问题中都非常有效，例如在小除数问题中、黎曼流形的嵌入问题

中,因此被称为纳什-莫泽技巧。

J.K. 莫泽与他的老师、著名数学家C.L. 西格尔合著了《天体力学讲义》,这是一本名著。

J.K. 莫泽是美国数学会和工业及应用数学会共同颁发的伯克霍夫应用数学奖的第一位获得者(1968年)。此奖是表彰对"最高和最广意义的应用数学"做出杰出贡献的人。J.K. 莫泽荣获此奖,是因为他在哈密顿动力系统理论方面的贡献,特别是他对具有两个自由度的哈密顿系统的周期解的稳定性的证明,以及他对与此有关的想法的具体应用。

J.K. 莫泽对数学发表了不少见解。他指出:"提炼出一个问题的本质特征,然后把它理想化,是数学的一种可靠而确实的技巧。……KAM理论的数学定理处理的不仅仅是太阳系,还包括一般的哈密顿系统,因而也包括描述运动的无阻尼过程的系统,因此,这些定理还可用于许多问题。这似乎有点巧合,但这恰恰是一般数学形式的长处。质子加速器的稳定性问题就是这些应用中的一个。"[112]他还说:"对数学发现的重要性的认识往往需要较长的时间,必须经过20年或者更长些。不幸的是,政治家们总是想要见到非常短期的效果。"[113]

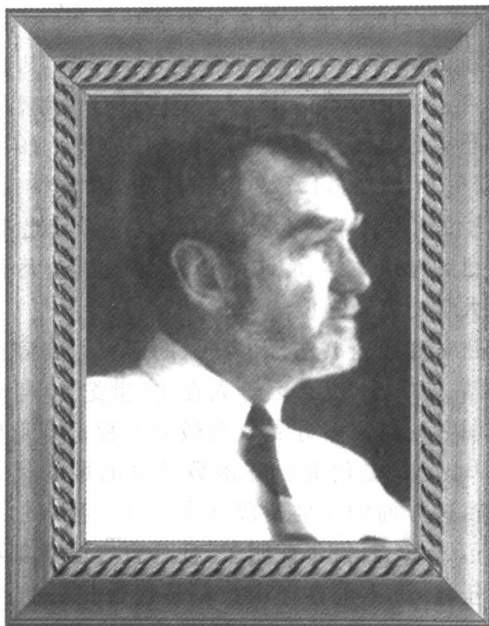
J.K. 莫泽获得多次科学奖:1968年荣获美国数学会及美国工业与应用数学会的伯克霍夫奖;1969年荣获美国科学院的克雷格·沃森(Craig Watson)奖章;1984年荣获布劳威尔(Brouwer)奖章。他还荣获康托尔(G. Cantor)奖章。

J.K. 莫泽1986年在美国伯克利举行的国际数学家大会闭幕式上,以国际数学联合会主席的身份讲话时,特别提到中国数学会现已正式加入了国际数学联合会,全场立即报以热烈的掌声。

J.K. 莫泽于1999年12月17日逝世,终年71岁。

R. 朗兰兹

(Langlands,Robert)



“数学家们已经沿着R. 朗兰兹的思路工作了25年，越来越多的证据说明事情正按他所说的那样发展。他成了数学前进的一种推动力。”[116]

——E. 邦别里(Bombieri)

“在数论学家中间，概念的新颖性常常遭到反对，因为他们时而不愿面对具体的事物，时而又恰恰相反。近半个世纪的发展已经使我们变得成熟了，……但是前面还有一个舞台在等着我们。”[117]

——R. 朗兰兹

R. 朗兰兹是加拿大数学家，1936 年 10 月 6 日生于加拿大不列颠哥伦比亚的新威斯敏斯特。

由于他指明道路性的工作，以及他对数论、自守形式和群表示论的非凡的洞察力，1996 年荣获沃尔夫数学奖，时年 60 岁。

R. 朗兰兹 1953 年入不列颠哥伦比亚大学学习，1957 年获学士学位，1958 年获硕士学位。其后赴美国耶鲁大学深造，1960 年获博士学位，同年任该校讲师，1967 年升任教授。1972 年起任普林斯顿高等研究所教授。1972 年当选为加拿大皇家学会会员。1981 年当选为伦敦皇家学会会员。他还获得哥伦比亚大学、麦克马斯特大学、纽约城市大学、滑铁卢大学、巴黎第七大学、麦克吉尔大学、多伦多大学的名誉学位。

R. 朗兰兹对自守函数进行了深入的研究。自守函数理论是由 J. H. 庞加莱与 C. F. 克莱因等人在 19 世纪 80 年代建立起来的，它对复变函数论的许多分支以及微分方程都有重要影响。自守函数论的中心问题是研究自守函数组成的域的代数结构。20 世纪中叶以前，这方面的主要贡献属于 C. L. 西格尔。在基本域紧致的情况下，C. L. 西格尔证明了：任一自守函数都可以写成自守形式之商；任意 $n+1$ 个自守函数都是代数相关的；可以选择 $n+1$ 个自守函数 $f_0, f_1, \cdots, f_n$，使任何自守函数都能表成它们的有理函数。C. L. 西格尔还构造一批具有重要意义的基本域的例子（紧致的和非紧致的），这些例子都与代数群的算术子群密切相关。20 世纪 50 年代以后，自守函数研究的重点转向基本域非紧但体积有限的情况。这方面，随着 A. 赛尔伯格“求积公式”的提出，R. 朗兰兹和 I. M. 盖尔范德等人揭示了自守函数与李群的无穷维表示、代数数论等的内在联系，引起了大量的深入研究。例如，属于 $GL_2(K)$（其中 K 是数域或有限常数域上单变量函数域）的自守形式（包括全纯和非全纯在内）的一般理论，以及对应的 ζ 函数的一般理论是由 A. 韦伊研究的。但是，R. 朗兰兹和 M. 杰奎特(Jacquet)从表示论的观点发展了一种新的理论，得到了和 A. 韦伊理

论实质上一样的结果。R. 朗兰兹和 M. 杰奎特的理论提供了一个统一的方法来讨论四元代数的戈德门特(Godement)-玉河 ζ 函数和艾克勒(Eichler)-志村-清水 ζ 函数。艾克勒的一个定理断言自守形式可以表示为(某一个 Γ 中的)θ 函数,清水把这个定理推广成 R. 朗兰兹和 M. 杰奎特体系中的一个定理。这些 ζ 函数也是由黑克(Hecke)算子定义的 ζ 函数。R. 朗兰兹对渗透理论作了卓有成效的研究。他还研究了一般的约化代数群上的自守形式的解析理论,并看到阿廷(Artin)L-级数与艾森斯坦级数理论中产生的欧拉乘积之间形式上的联系,并得到了一般猜想。

R. 朗兰兹的最杰出贡献是在非交换调和分析、自守形式理论和数论的跨学科领域研究之后,得出了把它们统一在一起的所谓"朗兰兹纲领",它最先是 R. 朗兰兹在 1976 年给法国著名数学家 A. 韦伊的一封信中提出的。朗兰兹纲领是一系列猜想、定理和见解。朗兰兹纲领的根源可以追溯到数论中最深刻的结果之一——二次互反律。二次互反律最早产生于 17 世纪 P. 费马的时代。数论中经常提到的一个重要问题是:当两个素数相除时,余数是否是完全平方?二次互反律揭示了关于素数 p 和 q 的两个貌似无关的问题之间存在的奇妙联系。这两个问题是:"p 除以 q 的余数是否为完全平方?""q 除以 p 的余数是否为完全平方?"C. F. 高斯先后给出了 8 种不同的证明,并称它是数论中的一块宝石、数论中的酵母、是黄金定理。直到现在数学家们已给出了 100 种以上的不同证明,二次互反律仍然是数论中最神奇的事实之一。1920 年日本数学家高木贞治和奥地利数学家 E. 阿廷(Artin)又发现了适用于较一般情形的互反律。R. 朗兰兹的一个最初动机,就是要对更一般情形的互反律提供一种完全的理解,R. 朗兰兹凭其数学才华与远见卓识的成功结合,看到了数学世界中的很大一部分内容以一种完全意想不到的方式联系在一起。他通过 20 世纪 60 年代和 70 年代的工作,告诉人们:代数中的基本对象跟分析中同样基本的对象牢牢地拴在一起。一方面,存在着决定数和代数方程如何

运作的基本数学事实;另一方面,又存在着决定函数和微分方程性质的基本事实。R. 朗兰兹提出的这两类对象之间的关系(尽管它们奠基于强有力的间接证据和美学考虑,但其中的大多数目前仍处于猜想阶段)提供了统一数学的原则,这是有深远意义的。

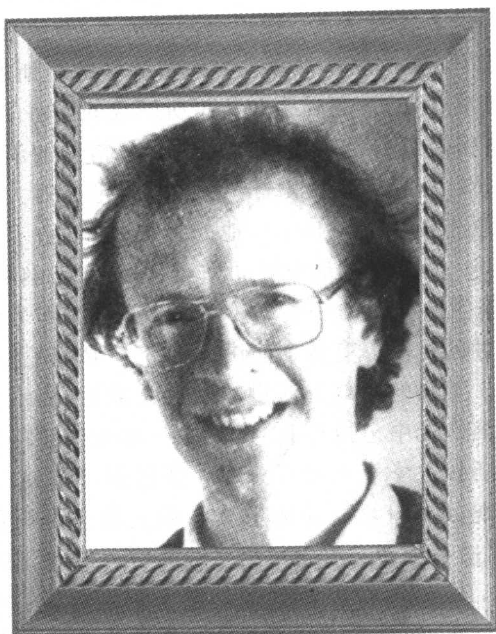
"朗兰兹纲领"推广了阿贝尔(Abel)类域论、黑克理论、自守函数论以及可约群的表示理论等。他在构造实可约群及 p-adic 可约群方面发展了一整套技术,由此证明了特殊情形的 E. 阿廷(Artin)猜想,进一步发展成证明"欧拉积分的函数方程存在"的朗兰兹-沙希迪(Langlands-Shahidi)方法 。他还提出了朗兰兹猜想:一大类欧拉积分均具有函数方程,特别对于典型群有"基底变换"现象。R. 朗兰兹提出涉及数论、自守形式和表示论的一整套猜想,具有"深远的影响和令人不可思议的准确性"。它似乎改变了自守形式和表示论的研究方向,并深刻地影响了人们对这些领域的理解方式,特别是对它们相互间的关系的认识。R. 朗兰兹提出的某种包揽无遗和大胆的猜想,将整个领域统一起来,使人看到一种崭新的前景。特别是朗兰兹纲领用李群的无穷维表示照亮了数论。著名数学家、菲尔兹奖得主 E. 邦别里说:"数学家们已经沿着 R. 朗兰兹的思想工作了 25 年,越来越多的证据说明事情正在按他所说的那样发展。他成了数学前进的一种推动力。"的确,数学家们目前面临的挑战是如何去建立一座座桥梁,把所有的东西都联系起来。在过去 30 多年间,由于 R. 朗兰兹和其他数学家的努力,这方面已经取得重要进步。最著名的当属普林斯顿大学的 A. 怀尔斯(Wiles)在解决费马大定理时,其证明中一个重要部分即是基于 R. 朗兰兹较早期的一个工作。

R. 朗兰兹 1982 年因在自守形式、艾森斯坦级数和乘积公式的开创性工作以及阿廷猜想的证明,荣获了美国数学会颁发的科尔奖;1988 年荣获了美国国家科学院首届数学奖,以表彰他"非凡的远见:他的想法已使群表示论跟自守形式和数论的关系进入了全新的革命时期"。

1996 年，R. 朗兰兹 60 岁生日之际，普林斯顿高等研究所数学部在 10 月 9 日至 12 日举办了一次颇具规格和规模的有关自守形式、几何和分析的研讨会，与会者来自世界各地，总数超过 200 人，其中有不少著名数学家。研讨会的目的是：介绍自守形式的基本思想；评述 R. 朗兰兹曾工作过的许多领域的最新发展；预测现称为“朗兰兹纲领”的一套问题和猜想所织成的网将向什么方向发展。有 20 多位著名数学家在研讨会上作了精彩的演讲。第一个作报告的是 R. 朗兰兹的母校——不列颠哥伦比亚大学的著名数学家 W. 卡塞尔曼(Casselman)，他的报告是《谁占了爱因斯坦办公室?》他对 R. 朗兰兹的数学生涯作了一番富于幽默感的回顾，追忆了 R. 朗兰兹早期的一些学术活动，罗列了其著作中使用的许多有启发性的比喻。有两个演讲则评介了 R. 朗兰兹关于渗透理论的研究。其余的大部分演讲涉及的是数论、表示论和自守形式的进展。演讲者中包括与 R. 朗兰兹一起荣获该年度沃尔夫数学奖的普林斯顿大学著名数学家 A. 怀尔斯(Wiles)。从这次研讨会可以发现：R. 朗兰兹的猜想从本质上看是那样的朴素和单纯，但是每前进一步却又需要付出坚毅的努力，这实在令人惊叹！

1990 年，R. 朗兰兹在谈到他的整个纲领时说：“……我们正在讨论一整套猜想，对它们是不能从正面进攻的。一方面，它们是具体的事实和问题提出的直接的召唤；另一方面，它们是有表达和揭示为数不多的宇宙规律的工具，而这些规律本身也是自然界的一种存在方式，是另一类型的实体，这两者之间在美学上的不协调性可能在物理学中是普遍认可的。物理界长期以来接受这样一个事实：为了理解可感知的真实事物，所需要的概念可以与该事物很少相似。在数学界就不一样，说来也怪，特别在数论学家中间，概念的新颖性常常遭到反对，因为他们时而不愿面对具体的事物，时而又恰恰相反。近半个世纪的发展已经使我们变得成熟了，对 G. 法尔廷斯(Faltings)关于莫德尔猜想的证明的审查已经说明了这一点，但是前面还有一个舞台在等着我们。”[117]

A. 怀尔斯
(Wiles, Andrew)



“费马猜想扮演了类似珠穆朗玛峰对登山者(在成功之前)所起的作用,它是一个挑战,试图登上顶峰的企图刺激了新的技巧和技术的发展与完善。”[12]

——M. F. 阿蒂亚

“G. 费雷(Frey)和 K. 里贝特(Ribet)所做的事情已经使费马猜想成为数学不能不管的一个问题的推论。依赖于这个问题的事太多了,对我来说,这意味着费马猜想快解决了。而我一旦有了信心,就不能丢开手了。”[119]

——A. 怀尔斯

A. 怀尔斯是英国数学家,1953 年 4 月 11 日生于英国剑桥。由于他在数论及相关领域的杰出贡献,在某些基本猜想上所做的重大推进,特别是证明了费马猜想,1996 年荣获沃尔夫奖,时年 43 岁。他是至今为止获得此奖的数学家中最年轻的一位。他还在 1998 年荣获菲尔兹特别贡献奖,时年 45 岁。他是迄今为止惟一荣获此奖的 40 岁以上的数学家。

A. 怀尔斯于 1971 年进入牛津大学默顿(Merton)学院学习,1974 年获学士学位。同年进入剑桥大学克莱尔(Clare)学院攻读博士,1977 年获博士学位,其后任克莱尔学院初级研究员及美国哈佛大学本杰明·皮尔斯(Benjamin Peirce)助理教授。1981 年去德国波恩任理论数学访问教授,同年末去普林斯顿高等研究所任研究员。同时还到欧洲多所大学访问讲学。1982 年起任普林斯顿大学教授。1988—1990 年任英国皇家学会设在牛津大学的研究教授。1994 年起任普林斯顿大学尤金·希金斯(Eugene Higgins)讲座教授。A. 怀尔斯 1989 年当选为英国皇家学会会员。1996 年当选为美国国家科学院外籍院士。

A. 怀尔斯最杰出的贡献无疑是证明了费马猜想。

费马猜想有着悠久的历史。我国早在商高时代(约公元前 1100 年)就已经知道不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 至少有一组正整数解:$x=3,y=4,z=5$。

希腊的丢番图(Diophantus)求得一般的解答:$x=2mn,y=m^2-n^2,z=m^2+n^2$,其中 $m,n(m>n)$是任意正整数。

法国数学家 P. de 费马(Fermat)以律师为职业,是一位业余的数学爱好者,却对数学做出了第一流的贡献:他在研究几何的过程中先于 R. 笛卡儿(Descartes)发现了解析几何的原理;他是微积分的杰出先驱者;他和 B. 帕斯卡(Pascal)共同开创了概率论的早期研究;他是近代数论的开拓者。从而,他被誉为“业余数学家之王”。

P. de 费马深入钻研了由法国数学家 C. G. 巴歇(Bachet)1621

年校订的并由希腊文译成拉丁文出版的丢番图的《算术》。1637年，P. de 费马在《算术》第二卷第八命题——“将一个平方数分为两个平方数之和”的旁边写道：“另一方面，不可能有一个数的立方表成另外两个立方数之和，一个数的四次方表成另外两个四次方数之和。一般来说，不可能有一个更高的方幂表成另外两个相应的方幂之和。我对此命题给了一个真正的非常奇妙的证明，只是此处的空白太小了，写不下。”这就是数学史上著名的费马猜想。这个猜想可以用现代的术语简述如下：

不可能有满足

$$x^n + y^n = z^n, xyz \neq 0, n > 2$$

的正整数 x, y, z, n 存在。

此外，P. de 费马还提出了数论方面许多引人注目的、富有洞察力的论断。到了19世纪中叶，除了上述这个猜想之外，其他所有的费马问题均已被数学家们相继解决。因此，这一猜想又被称为费马最后定理，或称费马大定理。

P. de 费马上述猜想的叙述是如此简单易懂，给人以容易证明的假象，加上 P. de 费马还说：“我对此命题给了一个真正的非常奇妙的证明”，于是许多数学家和业余数学爱好者致力于它的证明。布鲁塞尔科学院和法国科学院曾设奖金征求证明。1908年德国一位爱好数学的富翁 F. P. 沃尔夫斯克尔（Wolfskehl）在德国哥廷根皇家科学会悬赏10万马克征求证明，有效期为1908—2008年这100年。在 A. 怀尔斯的成功证明之前，有不少著名数学家，包括 G. W. 莱布尼兹（Leibniz）、L. 欧拉（Euler）、A. M. 勒让德（Legendre）、C. F. 高斯（Gauss）、P. G. L. 狄利克雷（Dirchlet）、E. E. 库默（Kummer）、F. 林德曼（Limdeman）等，以及无数数学爱好者为了证明费马猜想付出了艰辛的努力甚至毕生的精力，但依然没有得到证明，单是1909—1911年这三年间发表的错误证明就达1000篇以上。就连著名数学家、法国科学院士 A. L. 柯西和 G. 拉梅（Lamé）也在1847年分别给出了一个错误

的证明;德国著名数学家 F. 林德曼分别于 1901 年和 1907 年发表了两篇错误证明。真可谓"无数英雄竞折腰"。但是,费马猜想也激发了一代又一代数学家们的灵感,近代数论的许多内容都是基于试图证明费马猜想的努力而创建的。例如,德国数学家 E. E. 库默在试图证明费马猜想时,开创了理想数理论。而理想数理论又是代数数论及抽象代数学的源泉之一。正如 M. F. 阿蒂亚所说:"费马猜想扮演了类似珠穆朗玛峰对登山者(在成功之前)所起的作用,它是一个挑战,试图登上顶峰的愿望刺激了新的技巧和技术的发展与完善。"[12] D. 希尔伯特还风趣地说:"费马猜想是一只会下金蛋的老母鸡。"

A. 怀尔斯 10 岁时,在剑桥一个公共图书馆看到一本书上提到费马猜想,就立刻为之心驰神往,并花了不少时间和精力试图证明这个猜想,虽然没有成功,但费马猜想却深深地印入了他的脑海,并促使他爱上了数学,立志要做一名数学家,要致力于证明费马猜想。当成为一名职业数学家之后,他才懂得要证明费马猜想这类大难题,只有激情是远远不够的,还必须有坚实的数学基础和顽强的毅力。

A. 怀尔斯是一个安静而腼腆的人,脸上总是带着微笑。他多年来深居简出,潜心研究数学问题,并被誉为解决难题的能手。他在解决费马猜想之前对数学就做出了不少令人瞩目的贡献。例如,1977 年他与 J. 科茨(Coates)首先证明伯奇-斯温纳顿-戴尔(Birch-Swinnerton-Dyer)猜想这个椭圆曲线最重要的特殊情形;1984 年他与 B. 马祖尔(Mazur)一起证明岩泽理论中的主猜想。

A. 怀尔斯这次对费马猜想的证明是建立在近几十年来许多人工作的基础上的,他使用了模形式与表示论,特别是利用了费马猜想和椭圆曲线理论之间的联系。

1955 年,日本数学家谷山(Taniyama)曾提出过一个猜想:有理数域上所有椭圆曲线可以从一类特殊的曲线通过某种变换而得到。人们称这种椭圆曲线为模曲线(modular curves)。这个猜想

后来经过 A. 韦伊、志村(Shimura)加以完善，现称谷山-韦伊-志村猜想，即：有理数域上所有椭圆曲线都是模曲线。

20 世纪 80 年代中期，德国数学家 G. 费雷(Frey)证明了：若谷山-韦伊-志村猜想成立，则可以推出费马猜想成立。但是他的证明还不完整。1985 年他把自己的手稿交给数学界的朋友，希望其他数学家帮助完成他的这个不完整的证明。不久，法国著名数学家、菲尔兹奖得主 J. P. 塞尔(Serre)提出了一个“关于模伽罗瓦表示的水平约化猜想”，可以填补 G. 费雷的不完整的证明，但 J. P. 塞尔未能对他自己这个猜想给出证明。1986 年，美国数学家 K. 里贝特(Ribet)用一种“美妙的方法”证明了 J. P. 塞尔“水平约化猜想”。于是，要想证明费马猜想，只需证明谷山-韦伊-志村猜想。

G. 费雷与 K. 里贝特的工作，极大地激励了 A. 怀尔斯。他说：“当我听到 G. 费雷与 K. 里贝特的结果时，我知道数学的全景已经变了”[119]，“毫无疑问，他们做的事已经在我的心理上完全改变了这个问题。在这以前，费马猜想和数论中其他问题相像，这些问题可以丢在一边几千年解决不了，却对数学没有什么影响。”[119]他接着说：“G. 费雷和 K. 里贝特所做的事情已经使费马猜想成为数学不能不管的一个问题的推论。依赖这个问题的事太多了，对我来说，这意味着费马猜想快解决了。而我一旦有了信心，就不能丢开手了。”[119] A. 怀尔斯从听到 K. 里贝特的结果那天起，就决心要全身心来证明费马猜想。他在家里潜心地实行自己的计划，顽强地进行着研究。他说：“我从没有想停下来，它整日整夜地在我的头脑里。”[119]他不断取得进展，到最后只剩一些关键问题的时候，他看到了 B. 马祖尔(Mazur)的一篇文章中提到的一种做法，这使 A. 怀尔斯茅塞顿开，他说：“我马上就明白了，我应该用这个做法，我会解决最后的问题的。”[119]

1993 年 6 月，在英国剑桥大学牛顿数学研究所举行了一个名叫“岩泽建吉(Iwasawa)理论、模形式和 p-adic 表示”的学术会议。

A. 怀尔斯应邀做了一系列演讲，演讲的题目是《椭圆曲线、模形式和伽罗瓦表示》。在 6 月 23 日他的最后一个演讲结束时，他推出了谷山-韦伊-志村猜想对于半稳定的椭圆曲线来说成立。接着他平静地宣布："我证明了费马猜想。"这一振奋人心的消息不胫而走，不少报刊很快作了报导。英国报纸说：A. 怀尔斯的这项工作的预印本长达 1 000 多页，目前能完全弄懂他的证明细节的数学家不会超过 6 人。意大利著名数学家、菲尔兹奖得主 E. 邦别里(Bombieri，他是这次 A. 怀尔斯在剑桥大学作演讲时的听众之一)当时对英国《卫报》的记者说："A. 怀尔斯是一个非常仔细的数学家，从不草率地宣布结果。他的推理很美，而且并不十分难懂，我承认我只能懂其中一部分，但他证明的整个结构是十分可信的，是可靠的。"[121]

1993 年 6 月 25 日，当 A. 怀尔斯从剑桥大学回到他当时工作的普林斯顿时，受到了英雄凯旋般地欢迎。他兴奋而又疲倦，并说："我有将近 7 年没有丢开这个问题了，真是日复一日地干，我几乎想不起来哪一天起床时想的是别的事。"[119] A. 怀尔斯在剑桥演讲之后，新闻媒体对他的关注非同寻常，例如他被美国的《人物》(People)杂志评选为 1993 年最令人感兴趣的 25 个人物之一，与他一起被列入的还有英国的戴安娜王妃以及美国的克林顿总统和他的夫人希拉里等人。

行事谨慎的 A. 怀尔斯不但拒绝了 Gap 牛仔裤公司想让他做广告的要求，并且也没有急于发表他的文稿，而是不断地仔细检查，并发现在其证明中还有漏洞，这个漏洞主要出现在由塞尔默(Selmer)群构成的欧拉系上。为了填补这个漏洞，A. 怀尔斯邀请他以前的学生、剑桥大学的 R. 泰勒(Taylor)与他合作。他们经过研讨，放弃了欧拉系的途径，采用了原来 A. 怀尔斯试过的另一途径，并发现在作了某些赫克(Hecke)代数是局部完全交的假设之后，就可以完成对费马猜想的证明。于是，他们写成了两篇重要论文：一篇是由 A. 怀尔斯独自撰写的，其题目是《模椭圆曲线和

费马最后定理》;另一篇是由 A. 怀尔斯与 R. 泰勒合作撰写的,其题目是《某些赫克代数的环论性质》。第二篇论文建立了第一篇论中所需要的赫克代数的性质。1994 年 10 月,他们将这两篇论文的预印本送请一些著名数学家审查,其中有菲尔兹奖得主 G. 法尔廷斯(Faltings)。G. 法尔廷斯审阅完论文说,他确信论证是正确的。1995 年 5 月,世界权威数学刊物《数学年刊》(Annals of Mathematics)在其 142 卷第 3 期上,以整期的篇幅全文发表了这两篇论文,从而使 350 多年未获证明的大难题——费马猜想,终于获得了证明,这是 20 世纪最伟大的数学成就之一,A. 怀尔斯也将为此名垂史册。

美国南加州大学的 L. 阿德尔曼(Adelman)博士说:"这是数学中最激动人心的事,嘿,可能是从来没有过的。"[120]美国哈佛大学的数学家 B. 马祖尔博士说:"这一次证明了的东西远远超过了费马猜想本身,一个人可能找到一个问题的证明,尽管这个问题很著名,但这个证明可能没有什么深远的意义。但是这一次相反,这次产生了一种新技巧,它是很有用的,用它还可以证明更多的东西。"[120]

著名数学家、菲尔兹奖得主 D. 芒福德说:"A. 怀尔斯的绝妙成果不仅对数论帮了大忙,而且对我们整个领域的公众关系方面也是如此,因为到处传播着他在阁楼上为研究这个证明而长期奋斗的传奇故事。"[129]

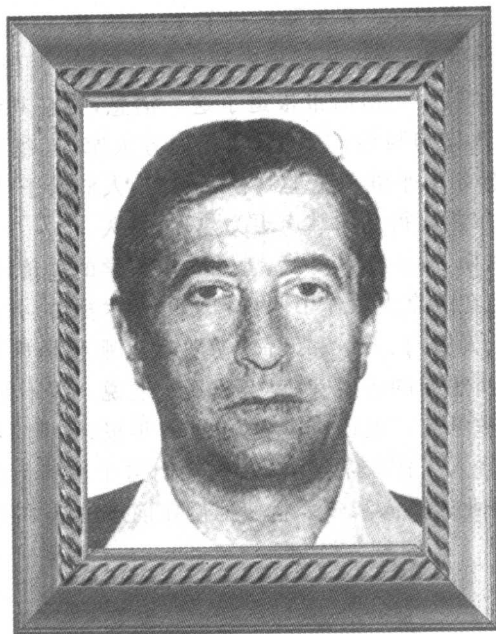
1994 年,A. 怀尔斯应邀在瑞士苏黎世举行的国际数学家大会上作了一小时报告,他报告的题目是《模形式与椭圆曲线》。

A. 怀尔斯在 1996 年荣获美国国家科学院数学奖、欧洲奥斯特洛斯基(Ostrowski)奖、瑞典科学院肖赫克(Schock)奖、法国费马奖。1997 年荣获美国数学会科尔奖,同年最终取得 1908 年 F. P. 沃尔斯克尔为解决费马猜想而设置的 10 万马克奖金。1998 年他荣获了沙特阿拉伯费萨尔(Faisal)国王国际科学奖。1999 年他荣获了第一个 CMI 数学奖。2005 年荣获邵逸夫数学科学奖。

1998 年 8 月,20 世纪最后一届国际数学家大会在德国柏林隆重召开。会议的一项重要内容是宣布本届菲尔兹奖得主名单。菲尔兹奖素有数学中的诺贝尔奖之称,按照惯例只能授予不超过 40 岁的数学家。当时 A. 怀尔斯已过了 45 岁生日,但是鉴于他成功地证明了费马猜想,为了表彰他的这一光辉成就,大会给他颁发了一个特别贡献奖。一份简报报道了这一消息,并在其结尾处诙谐地运用费马式口吻写道:"不过,这儿地方太窄,容纳不下他的证明。"当 A. 怀尔斯平静地走上讲台领奖时,人们给予他的掌声,比给予四位菲尔兹奖得主的掌声更为热烈、持久。

A. 怀尔斯 2005 年 8 月底,曾应北京大学的邀请访问了北京。访问期间,他在北京大学作了两场精彩的学术报告,并兴致勃勃地游览了故宫、天安门、天坛和北海,游览后其观感是皇帝居住的故宫比他此前所想像的还要宏伟得多,不过他说:"我不愿意当皇帝,我宁肯做个数学家。"他还应邀为《中国青年报》的读者赠言:"我认为中国的年轻人工作非常努力,希望他们勇于追求自己挚爱的东西,因为对事业的投入和热爱将使他们在前进的途中所向披靡。"

Y. 赛奈
(Sinai, Yakov)



“Y. 赛奈得到的许多科学成果，获得的许多新概念已经应用到数学领域中去，所创建的新方法牢固的进入了遍历性理论、概率论与数学物理的各个分支中”。[169]

——S. P. 诺维科夫

“黎曼流形上的台球戏是一种动力系统，……无论就遍历理论本身还是它在偏微分方程、量子混沌、统计力学等方面的应用来看，台球戏构成一类重要的动力系统。”[123]

——Y. 赛奈

Y. 赛奈是俄国数学家,1935 年 9 月 21 日生于莫斯科。

由于他对统计力学中数学严格方法及动力系统的遍历理论以及它们在物理学中的应用所做的基础性贡献,1997 年荣获沃尔夫数学奖,时年 62 岁。

Y. 赛奈在青少年时代深受其外祖父——著名数学家、苏联张量微分几何学派的创始人 B. Φ. 卡甘(Kaган)的影响,热爱数学。Y. 赛奈 1953 年进入莫斯科大学数学系学习,1957 年本科毕业,并考取了 A. 柯尔莫哥洛夫的研究生,他在读研究生期间,就给出了很广一类动力系统熵的可能性最早一些定理,这些工作在现在的科学文献中有公认的术语“柯尔莫哥洛夫-赛奈熵”。之后,在莫斯科大学柯尔莫哥洛夫领导的系际统计方法实验室工作,先是初级研究员,然后是研究员,同时在数学力学系任教。1971 年任苏联科学院兰道理论物理研究所研究员。Y. 赛奈 1960 年获副博士学位、1964 年获博士学位,1981 年晋升教授,1991 年当选为俄国科学院院士,他还是美国艺术与科学研究院院士,伦敦数学会名誉成员。1993 年起兼任美国普林斯顿大学教授。

Y. 赛奈是统计物理学中数学问题的国际权威,特别是对遍历理论有突出贡献。遍历理论起源于所谓遍历性假设,这个假设是作为经典统计力学的基础由 L. E. 玻耳兹曼(Boltzmann)和 J. W. 吉布斯(Gibbs)在 19 世纪末提出来的。许多数学家企图对这个假设给出证明,其结果形成了 J. H. 庞加莱(Poincaré)和 C. 卡拉西奥多里(Carathéodory)的回归定理,以及 G. D. 伯克霍夫(Birkhoff)和 J. 冯 · 诺伊曼(Von Neumann)的遍历定理。这些定理标志着如今所说的遍历理论的出发点。J. H. 庞加莱在 1899 年以标题为《泊松稳定性》的论文首先证明了他的回归定理,后来 C. 卡拉西奥多里在 1919 年对这条定理赋以测度论的形式并重新证明。随着理论的进一步发展,它与其他一些数学分支,例如,动力系统理论、概率论、泛函分析、数论、微分拓扑和微分几何等学科,取得了密切的联系。现代遍历理论主要对象是研究可测变换,特别是

具有一个不变测度的变换的性质。在大多数情况下，所研究的这些变换定义在一个具有有限(或 σ 有限)测度的勒贝格测度空间上。Y. 赛奈首次给出任意保测映射的不变量熵的严格定义。

为了使读者了解 Y. 赛奈在遍历理论中所取得的主要成果，先简要介绍一些有关概念和符号。

对于一个有限的或可数的分割 $\xi=\{A_n\}$，定义分割的熵 $H(\xi)$ 为 $\sum_n m(A_n)\ln(m(A_n))$。我们用 Z 表示所有使得 $H(\xi)<\infty$ 的分割 ξ 的集合，如果 $\xi\in Z$，那么对于任意的自同态 φ，极限

$$h(\varphi,\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(H(\bigvee_{k=0}^{n}\varphi^{-k}\xi))$$

存在并且是有限的。自同态 φ 的熵 $h(\varphi)$ 定义为

$$\sup\{h(\varphi,\xi)\mid\xi\in Z\}$$

它是一个同构不变量。

Y. 赛奈证明了：如果分割 $\xi\in Z$ 对于自同态 φ 是一个生成元或者对于自同构是一个两边生成元，那么 $h(\varphi)=h(\varphi,\xi)$。

Y. 赛奈证明：一个自同构 φ 有完全正熵(一个自同构 φ 有完全正熵，是指对于每个非平凡分割 ξ，有 $h(\varphi,\xi)>0$)，当且仅当 φ 是一个 k 自同构。

如果自同构 φ_1 和 φ_2 中的每一个是另一个的因子变换，则称自同构 φ_1 和 φ_2 为弱同构的。

Y. 赛奈证明了：两个具有相等的熵的强混合马尔可夫推移是弱同构的。

R. B. 阿德勒(Adler)和 B. 韦斯(Weiss)指出，二维环面的每个遍历的群自同构有一个两边马尔可夫生成元。后来，Y. 赛奈证明了：这个结果对于 n 维环面的一个遍历群自同构也是对的，条件是这个群自同构的表示矩阵没有模为 1 的特征值。

Y. 赛奈还得到了判别经典动力系统(这里所说的经典动力系统指的是由某个微分流形 M^n 上的一个光滑向量场所生成的一个微分同胚或者一个流。)是否为 K 系统的一个很有用的准则：设

M^n 是紧的，$\{\varphi_i\}$ 是 M^n 上的由一个光滑向量场定义的并且保持某个光滑测度 μ 的流。由一个向量场给出的空间 M^n 的变换的一个单位单参数群 $\{\psi_i\}$ 称为对于流 $\{\varphi_i\}$ 是横截的，如果：(1)对于空间 M^n 分为流 $\{\psi_i\}$ 的轨道分解在 $\{\varphi_i\}$ 下是不变的；(2)定义函数 $W_i(t,x)$，$W_s(t,x)$ 为流 $\{\psi_i\}$ 的轨道间隔 $\{\varphi_s\psi_u(x)\mid 0\leqslant u\leqslant t\}$ 的时间长度，极限 $\lim\limits_{s\to 0}\lim\limits_{t\to 0}(W_s(t,x)-t)/ts=\alpha(x)$ 存在。

由此，Y. 赛奈得到如下基本定理：如果一个流 $\{\varphi_t\}$ 是遍历的，并且有一个横截的遍历流 $\{\psi_t\}$，对于它 $\int\alpha(x)\mathrm{d}\mu<0$，那么 $\{\varphi_t\}$ 是一个 K 流。如果 $\alpha(x)<0$，则可以去掉 $\{\varphi_t\}$ 是遍历的假设。如果 $\int\alpha(x)\mathrm{d}\mu>0$，此定理对于流 $\{\varphi_{-t}\}$ 成立。

在常负曲率二维流形上的一个测地流恒有一个横截流，称为极限圆流。

极限圆流的遍历性已由 G. A. 赫德伦(Hedlund)证明。由上述 Y. 赛奈的基本定理可以推出：在常负曲率曲面上的测地流是一个 K 流。Y. 赛奈还证明了：在任意负曲率曲面上的测地流是一个 K 流。横截流这一概念有一个到高维情形的推广，称为横截场。应用这个概念，Y. 赛奈证明了：在(任意维的)常负曲率流形上的测地流是一个 K 流。

Y. 赛奈还研究了由于不具光滑性而不是阿诺索夫(Аносов)系统的一个重要例子：属于 L. 玻耳兹曼和 J. W. 吉布斯的理想气体的最简单的力学模型可以描述为，在一个矩形的盒子里，许多非常小的刚性圆球作弹性碰撞运动所产生的系统。1970 年，Y. 赛奈成功地证明：这是一个 K 系统，由此对于统计力学基本模型的遍历性这一经典问题给出了一个肯定的回答。

Y. 赛奈还证明弹子运动的遍历性以及拟周期 E. 薛定谔(Schrödinger)方程的谱性质。

Y. 赛奈还与 I. P. 科恩菲尔德(Cornfeld)、S. V. 福曼(Fomin)合著了一本《遍历理论》，这是斯普林格出版社 1982 年出

版的一本名著。

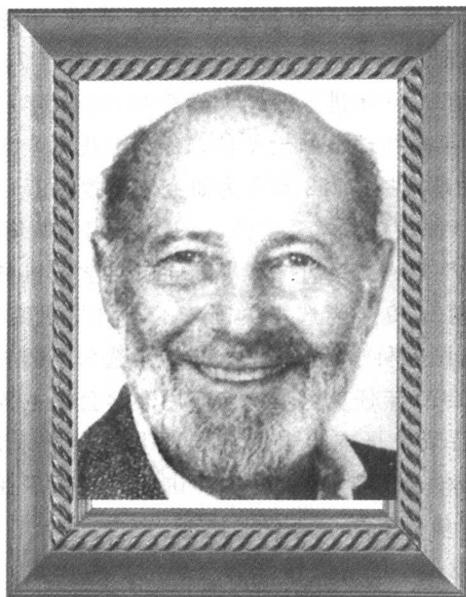
多年来，Y. 赛奈在莫斯科大学数学力学系领导了遍历性讨论班，许多优秀大学生被吸引到他周围，这不仅是因为他能够提出重要的问题，而且他随时随地会在困难情况下去帮助他们。他既对学生的成功与失败给予极大关注，同时也毫不留情地对学生的懒惰给予严厉的批评。从而培养出了不少杰出人才，并形成了以他为首的遍历性理论和统计物理方面的学派。

总之，Y. 赛奈对统计物理学的数学问题，特别对遍历理论在物理学的应用，做出了一系列的重要贡献。对 Y. 赛奈的杰出贡献 S. P. 诺维科夫等人评论："Y. 赛奈的科学创造，就整体而言，他属于那些不多的数学家行列，这些数学家的思想和成就不仅在很大程度上决定着某些数学分支的现状，而且本质上影响了物理学家的世界观。正因为后者，Y. 赛奈获得了一系列荣誉，其中有授予世界上最优秀物理学家的玻耳兹曼（Boltzman）金质奖章（1986 年）、迪拉克（Dirac）奖章（1993 年）和海涅曼（Хейнеман）奖金（1990 年），他还获得了苏联科学院的马尔科夫（Марков）奖金。"[169]

1990 年在日本京都举行的国际数学家大会上，Y. 赛奈被邀请作一小时的报告，他报告的题目是《双曲台球戏》。他在报告中指出："黎曼流形上的台球戏是一种动力系统，这种动力系统对应着具有沿着边界的弹性反射的流形上某区域内各种测地线上的定速运动。无论就遍历理论本身还是它在偏微分方程、量子混沌、统计力学等方面的应用来看，台球戏构成一类重要的动力系统。在双曲台球戏中，轨道的性质在许多方面相似于双曲空间中测地线的性质，这里所谓的双曲空间是指负曲率黎曼流形。这种双曲台球戏用稳定和不稳定流形的几乎处处存在来定义。……在高维情形，人们可以自然地定义半散开型台球戏，这只要求边界上的曲率算子是非负的。带有弹性碰撞的坚硬圆盘或球体系统可以用半散开型台球戏来描述。双曲台球戏是用光滑动力系统方法的推广来进行研究的。"[123]

J.B. 凯勒

(Keller,Joseph Bishop)



"J.B. 凯勒是一位卓越的应用数学家。……他的杰出贡献涉及固体力学、流体力学、量子力学、热力学和统计力学等领域。"[124]

——from Wolf Foundation News Release

"J.B. 凯勒是解决科学与工程问题最前沿的数学技巧的当代创造者。因他在数学方法论及其在大量应用领域的杰出贡献而获得殊荣。……他创造了许多技巧来解决数学问题,然后他又用简练的语言来解释其结果以及它们的意义与后果。"[126]

——B.J. 马特科斯凯(Matkowsky)

J. B. 凯勒是美国应用数学家，1923 年 7 月 31 日生于美国新泽西州帕特森。

由于他对于各种波动现象的深刻研究，包括固体力学、流体力学、量子力学、统计力学中的各种波（声波、光波、电磁波），及其所做出的杰出贡献，1997 年荣获沃尔夫数学奖，时年 74 岁。

J. B. 凯勒 1940 年进入纽约大学学习，1943 年获得物理学学士学位，1946 年获物理学硕士学位，1948 年获博士学位。其后在纽约大学任助理教授，1952 年升为研究副教授，1956 年升为教授，1967—1973 年任该校数学系主任。1979 年起任斯坦福大学教授，其后任刘易斯・特曼（Lewis M. Terman）数学及机械工程讲座教授。J. B. 凯勒 1969 年当选为美国艺术与科学研究院院士，1973 年当选为美国国家科学院院士，1986 年当选为英国皇家学会外籍会员，1978—1979 年任美国工业与应用数学会副主席。1981 年和 1988 年他先后荣获哥本哈根和美国西北大学的荣誉博士称号。他曾做美国数学会的吉布斯（Gibbs）讲演和美国工业与应用数学会的冯・诺伊曼（Von Neumann）讲演。

J. B. 凯勒是一位博大精深的杰出应用数学家。他的研究领域包括应用数学、声学、电磁理论、流体力学和几何光学。特别是对于各种波动现象的数学有精湛的研究，包括流体力学、固体力学、量子力学、统计力学中各种波（包括声波、光波及电磁波）的传播、发射、散射理论。

J. B. 凯勒最杰出的贡献之一是几何衍射理论（GTD），他的这一理论可以用来解决波在传播中的很多问题。他研究此理论始于第二次世界大战，当时他在哥伦比亚大学战争研究分部研究声呐系统的问题。几何衍射理论是几何光学理论的重要扩展，在其中波的传播用光线来描述。几何衍射理论的扩充克服了几何光学理论中的一些困难，例如：几何光学理论不能解释衍射现象。在 J. B. 凯勒的几何衍射理论中，他发展了一套系统的方法来处理高

频波的传播问题,获得并解出了决定信号传播的光线也即路径的方程,以及能量如何沿这些光线传播的方程,包括光线遇到障碍或通过非均匀介质时的现象的预测。在J. B. 凯勒的工作之前,此领域仅解决了一些孤立的问题,而且没有通用的理论供工程师和科学家用来解决更为复杂和技术上更为重要的问题。J. B. 凯勒的几何衍射理论为工程师和科学家提供了一套系统而通用的理论。J. B. 凯勒还研究了在不均一、扰动及随机媒介中波传播的问题。在这一工作中,他发展了两种被广泛使用的方法:用于包含微小的大量变化的问题的光滑法;用于有迅速变化系数问题的多阶法。他的这些方法和理论为许多人所采用,并以齐性化(均匀化)理论著称于世。关于此理论已发表了大量文章。

J. B. 凯勒还把他最早为波的传播所建立的理论和方法推广到许多领域。例如,他在半经典力学中的基础工作,归纳了普朗克(Planck)、H. 波尔(Bohr)、A. J. W. 索末菲尔德(Sommerfeld)、E. B. 威尔逊(Wilson)、A. 爱因斯坦(Einstein)、布利尤安(Brillouin)等人的早期工作以获得不可分系统中正确的定量规则,由此产生了对任何共轭系统有效的结果。这些结果当今被称为爱因斯坦-布利尤安-凯勒(E. B. K)定量规则,现在正为化学物理学家和其他科学家所广泛使用。他在有关著作中,引入了相应于一条闭合曲线穿过一表面的重要度量。后来进一步由马斯洛夫(Maslov)归纳为基于拉格朗日多项式的曲线,这一度量被称为凯勒-马斯洛夫(Keller-Maslov)指标。这一工作后来又由凯勒推广到闭合域中的问题,并成为偏微分方程中令人关注的课题。

J. B. 凯勒对于水下爆炸的问题也很有建树。在20世纪50年代初,他与J. 冯·诺伊曼一起服务于美国军队特别武器计划中原子弹水下爆炸委员会,并研究原子弹爆炸对船和潜艇的影响。他的研究获得了一批重要结果,例如:水下爆炸气泡振荡的凯勒-柯洛德纳(Keller-Kolodner)理论;球状气流的相似解法;爆炸产生

的水波的克兰泽-凯勒(Kranzer-Keller)理论。这些理论和方法至今仍被广泛使用。

J. B. 凯勒的理论和方法不但广泛地应用于科学和工程中的许多领域,例如雷达信号检测、天线设计、船体设计乃至生命科学理论——包括血管的破裂、菌群的生长以及癌产生的数学模型,而且也广泛地应用于数学领域,例如,他的工作成为傅里叶积分算子和拉格朗日多项式理论发展的推动力。他的理论和方法不但发展了几何衍射方法,而且也发展了奇异微扰方法、渐近展开理论、分岔理论。

J. B. 凯勒不但是一位杰出的应用数学家,还是一位优秀的教师。至今他已经培养出五十多位博士,并吸引了许多博士后与他一起合作,其中很多人已经成为优秀的应用数学家,这些人被数学界誉为是"凯勒应用数学学校"造就的。

J. B. 凯勒 1979 年荣获美国工业与应用数学会的冯·卡门(von Karman)奖。1984 年荣获美国机械工程学会的铁木辛哥(Timoshenko)奖章。1994 年荣获美国国家科学奖。他还两次荣获美国数学会的福特(Lester R. Ford)奖。

美国西北大学的 B. J. 马特科斯凯(Matkowsky)评论说:"J. B. 凯勒是解决科学与工程问题最前沿的数学技巧的当代创造者。因他在数学方法论及其在大量应用领域的杰出贡献而获得殊荣。他把数学方法发展中的创造性与深刻的物理洞察力结合在一起。他有一种极好的思维能力,他能用简明而实用的模型来描述真实世界中的复杂问题。他创造了许多技巧来解决数学问题,然后又用简练的语言来解释其结果以及它们的意义与后果。对于如何将某个学科中发现的有用思想,出色地引入到其他学科领域方面,他是一位大师。此外,他教育和培养了被称为'凯勒应用数学学校'的数代应用数学家。通过他本人与他的学生以及曾与他合作的科学家的工作,他对一些问题的数学描述与解决的方法,产生

了深刻而持久的影响。”[126]

1994 年在瑞士苏黎世召开的国际数学家大会上，他应邀以《波的传播》为题作了一小时的全会报告，受到了热烈的欢迎。

J. B. 凯勒 1976 年 5 月曾以“美国纯粹数学与应用数学代表团”成员的身份访问了中国。

L. 洛瓦兹

(Lovász, László)



“L. 洛瓦兹是著名的组合论专家,国际计算机科学界的领袖人物。”[146]

——摘自:《20 世纪数学经纬》

“数学是一个整体——数学的分化决非自然的结果。……我们这门科学有其高度的完整性,正是这种完整性,使其具有强大的力量和经久不衰的活力。”[147]

——L. 洛瓦兹

L. 洛瓦兹是匈牙利数学家，1948 年 3 月 9 日生于匈牙利布达佩斯。

由于他对理论计算机科学、组合数学和组合优化做出了杰出贡献，1999 年荣获沃尔夫数学奖，时年 51 岁。

L. 洛瓦兹 1971 年获 Eötvös Lorand 大学的自然科学博士学位，1977 年获匈牙利科学院的数学科学博士学位，1978—1982 年任 Jozsef Attila 大学教授，1983—1993 年任 Eötvös Lorand 大学教授。1993 年起美国任耶鲁(Yale)大学计算机科学系教授，1979 年当选为匈牙利科学院通讯院士。

L. 洛瓦兹是计算机科学和组合论领域的著名专家。

理论计算机科学是关于计算和计算机械的数学理论，亦称为计算理论或计算机科学的数学基础。在数学发展过程中，人们研究了各种各样的计算，创立了许多算法，但是以计算或算法本身的性质为研究对象的数学理论却是在 20 世纪 30 年代才发展起来的。当时为了要解决数学基础的某些理论问题，即是否有的问题不是算法可解的？为了回答这个问题，可以给出一个计算的模型，然后规定，凡是这个模型能计算的问题类就叫作可计算的，否则就叫作不可计算的。于是产生了各种计算的模型，例如：图灵机、递归函数、λ 演算、马尔可夫算法、递归算法等。但是，会不会有一类问题，在一个模型中是可计算的，而在另一个模型中却是不可计算的呢？如果是这样，一个问题类的可计算性就依赖于模型，而不是问题类本身的性质了。著名的丘奇-图灵论题回答了这个问题。这个论题说："凡是合理的计算模型都是等价的，即一个模型能算的问题类别的模型也能算，一个模型不能算的别的模型也不能算。"这个论题不是一个严格的命题，无法给予一般的证明，但可以对一个具体的模型去验证它的正确性，从而建立了算法理论(即可计算性理论)。理论计算机科学还包括形式语学、算法分析和计算复杂性理论。

L. 洛瓦兹对理论计算机科学做出了一系列的贡献，他设计了

许多算法，其中最重要的有：格子基约化算法、拟阵奇偶性算法以及体积计算的改进。他的这些算法大大促进和丰富了理论计算机科学。L. 洛瓦兹在计算复杂性方面取得了突出的成就。计算复杂性是现代理论计算机科学中最重要的分支之一。它研究各种问题在计算时所需要耗费的时间、空间等资源的多少，是可计算理论的新发展。L. 洛瓦兹在计算复杂性方面提出 NP 的 PCP 刻画及其与逼近的难度的关系，具有重要的理论和实践价值。

L. 洛瓦兹曾作为计算机科学的著名专家应邀在 1990 年国际数学家大会上以《几何算法和算法几何》为题作了 1 小时大会报告，他在报告中指出："一个新的研究方向竟会激励数学中某一经典领域的发展，真使人惊奇。近数十年来，计算数学提出了一些涉及到数学基本概念的问题，这些问题的研究丰富了相应的经典领域；反之，这些领域中深奥的方法（经过几个世纪而发展起来的）又在算法设计中起着越来越重要的作用。在经典数学和计算数学之间的相互作用较深的著名的例子也许是利用椭圆曲线理论和广义黎曼假设的原理检验，应用范围从密码学到随机数学的产生。……点格也是一个经典几何问题，它的算法问题即使从构造的观点来看已经引起了非常活跃的研究。……格的算法往往非常恰当地补充了凸体的算法。"[166]

L. 洛瓦兹还是著名的组合论专家。组合论又称组合数学，是数学的一个分支，是研究"安排"的一门学科。当把已给的有限个或可数无限个物体按一定规则来安排时，自然会产生以下四个问题：符合要求的安排是否存在？这些安排有多少种？怎样做出这些安排？当有衡量这些安排优劣的标准时，怎样求出最优安排？这四个问题依次称为存在问题、计数问题、构造问题、优化问题。G. W. 莱布尼兹于 1666 年首次在近代数学的意义下使用"组合"一词，这是在他的著作《论组合的艺术》中出现的。自 17 世纪至 20 世纪 30 年代，组合数学受到娱乐、数论、概率论和化学等方面的推动而迅速发展，得到了一般的存在性定理和计算原理。L. 洛

瓦兹在组合论中引进了许多新的算法思想，包括应用椭球算法于组合最优化，他认为："椭球方法，似乎给整个组合最优化理论带来了革命性的改变"[148]，从而为组合最优化奠定了新的方向。他还说："事实上，几乎所有有效算法可解的组合最优化问题，似乎都可以用椭球法和所谓 Greed 算法联合起来去解。"[148]

L. 洛瓦兹还解决了若干重大猜想，例如完美图猜想和尼瑟(Knese)猜想。

L. 洛瓦兹还发展了概率方法，他的"局部引理"是其早期主要成果之一。

L. 洛瓦兹著有大量书籍和综述性文章，他的论著表明了他的知识极其渊博，并对广阔的领域产生了很大影响。他除了荣获沃尔夫奖外，还于 1979 年获美国 SIAM 的波利亚(Polya)奖，1982 年获美国数学会 D. Ray Falkerson 奖，1985 年获匈牙利国家奖，1993 年获荷兰数学会 Brouwer 奖章，1998 年获匈牙利国家功勋奖章。

L. 洛瓦兹对数学的统一性发表了许多见解。例如，他在一篇题为《数学是一个整体——数学的分化决非自然的结果》的论文中指出："数学已被许多分界线割裂得支离破碎，其中最为突出的是纯粹数学和应用数学的分野……我们是否一定要将这种分割的情况看做为一种天经地义的事，……我却认为，听凭这种现象蔓延，必将导致可悲的结果。我们这门科学有其高度的完整性，正是这种完整性使其具有强大的力量和经久不衰的活力。我希望表明这样几个观点：我们这门科学中新近出现的倾向使这类分割的情况更加扑朔迷离了；我们必须竭尽全力填补这些鸿沟；正是这些新近出现的倾向为我们逾越这类鸿沟创造了条件。"[147] 他特别强调："就数学而言，并没有天然的界线可以将其分割成不同的板块。当然，在各个领域之间，信息沟通出现严重的障碍是完全可能的。为了避免出现这样的情况，我们应当认识到有必要付出一定的代价：不仅在组织工作上要做出努力，而且要舍得花些时间进行研究，撰

写并阅读综述性的著作，普及数学知识，关注不同应用领域中产生的数学问题。”[147]他还在一篇题为《离散与连续：一物之两面?》的论文中深刻地论述道：“离散与连续数学之间的裂痕有多深? 数学科学的这两个方面在基本的结构和方法上大相径庭，但在更深层次，它们有着比外表看来更实质的联系。”[170]

E. M. 斯坦
(Stein, Elias M)



"E. M. 斯坦、G. 韦斯和 C. 费弗曼等人,把奇异积分同哈代-李特尔伍德极大函数、面积积分、多元调和函数边界性质、李特尔伍德-佩利理论联系起来,组成了近代调和分析的主要工具。"[80]

——摘自:《中国大百科全书》(数学卷)

"近十年来调和分析的进展使人体会到一些质朴的几何解释的日益增大的重要性。"[149]

——E. M. 斯坦

E. M. 斯坦是比利时裔美国籍数学家，1931 年 1 月 13 日生于比利时安特卫普(Antwerp)。

由于他对分析领域做出的贡献，特别是与 G. 韦斯(Weiss)共同建立了多个实变元的哈代空间，在李群表示论中与 R. 孔泽(Kunze)共同发现了所谓孔泽-斯坦现象，于 1999 年荣获沃尔夫数学奖，时年 68 岁。

E. M. 斯坦 10 岁时就移居美国并在美国受教育，1952 年入美国籍，1951 年毕业于芝加哥大学获学士学位，1955 年在芝加哥大学获博士学位。1955—1962 年先后任教于麻省理工学院和芝加哥大学，1962—1963 学年在普林斯顿高等研究所从事研究，1963 年起在普林斯顿大学任教。1974 年他当选为美国国家科学院院士，1982 年当选为美国文理学院院士。

E. M. 斯坦是当代分析，特别是调和分析及分析领域的杰出人物，是多维欧氏调和分析的创立者之一。其最骄人的成就是与 G. 韦斯(Weiss)、C. 费弗曼(Fefferma)共同建立了多个实变元的哈代空间理论。哈代空间又称 H^p 空间，它是除勒贝格空间(L^p)以外重要空间之一。1915 年英国数学家 G. H. 哈代(Hardy)引入了 H^p 函数类，1923 年匈牙利数学家 F. 里斯(Riesz)证明它们是完备的赋范空间或度量空间，并命名它们为哈代空间或简称 H^p 空间。在讨论傅里叶分析的许多问题中，H^p 是较 L^p 更为合适的空间(当 $0<p\leqslant 1$)。多变量 H^p 空间的建立却要晚得多，这是因为单元 H^p 空间的定义紧密依赖于单元解析函数，然而形式地通过多元解析函数来定义多元 H^p 空间，由于多元解析函数比单元解析函数复杂得多，未能得到预期的结果，因此需要寻求另外的办法。1960 年，E. M. 斯坦和 G. 韦斯独辟蹊径，把上半平面的解析函数的实部与虚部的概念推广到 $n+1$ 维欧氏空间的上半空间 $R_+^{n+1}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,y):y>0\}$，得到共轭调和函数的概念。在 $p>\frac{n-1}{n}$ 的前提下，定义了 $H^p(R_+^{n+1})$。即 E. M. 斯坦和 G. 韦

斯引进了上半空间 R_+^{n+1} 上的 H^p 空间，它们是 $n=1$ 的推广。当 $n=1$ 时，$H^p(p>0)$空间中的函数在 $R=(-\infty,+\infty)$上的边值函数几乎处处以及在 L^p 范数下都存在，E. M. 斯坦和 G. 韦斯所定义的多维 $H^p(R_+^{n+1})$空间，显然是一维 $H^p(R_+^2)$空间的推广。人们自然要问，经典的 $H^p(R_+^2)$空间中的基本性质，例如边值函数的存在性等等，在多维 $H^p(R_+^{n+1})$空间中是否还被保留？E. M. 斯坦和 G. 韦斯首先发现，$p>\frac{n-1}{n}$时，答案是肯定的；例如他们证明，若 $F\in H^p(R_+^{n+1})$，$p>\frac{n-1}{n}$，那么$\lim\limits_{y\to 0} F(x,y)$几乎处处以及在 L^p 范数意义 F 都存在。

1964 年 A. P. 考尔德伦(Calderón)与 A. 赞格蒙(Zygmund)把 $p>\frac{n-1}{n}$的条件改进为 $p>0$，但其形式十分复杂。把 $H^p(R)$了解为 $H^p(R_+^2)$的广义函数意义的边值，1970 年 D. L. 伯克霍尔德(Burkholder)、R. F. 冈迪(Gundy)与 M. L. 西尔弗斯坦(Silverstein)证明了广义函数 f 是 $H^p(R)(p>0)$中某个元素的实部的充分必要条件是极大函数

$$M(f)(x)=\sup_{|y-x|<t}|(\varphi_t*f)(y)|\in L^p(R) \qquad (1)$$

式中，$\varphi(x)$是具有一定光滑性且在无穷远附近的大小受一定限制的函数；$\varphi_t(\cdot)=\frac{1}{t}\varphi(\frac{\cdot}{t})$；$*$ 表示卷积。1972 年 E. M. 斯坦和 G. 费弗曼把这个结果推广到了多元的情形。值得注意的是，$M(f)\in L^p$ 这个条件完全和解析函数的概念无关，它给出了 H^p 空间的实变函数论特征，从而就可以用类似于式(1)的条件来定义 $H^p(R^n)$本身，而无须借助任何解析函数或调和函数的概念。

E. M. 斯坦和 C. 费弗曼引用了费弗曼-斯坦分解：$f\in$ BMO 当且仅当 $f=u+\bar{v}$，此处，$u,v\in L^\infty$，$\bar{v}$ 为 v 的希尔伯特变换。这个事实表明，判断一个函数是否属于 BMO 空间(BMO 空间是有平均振动空间的简称，它是 1961 年由 F. 约翰和 L. 尼伦伯格

(Nir enberg)在研究椭圆型偏微分方程的解时所引进的一类函数空间。)可以纯粹用调和分析的语言来表述与刻画。因此,这个事实也就成为揭示 BMO 空间和调和分析之间内在关系的纽带。特别是 E. M. 斯坦和 C. 费弗曼还得到了费弗曼-斯坦定理:哈代空间$H^1(R^n)$的对偶空间为 BMO 空间,记作$(H^1)^*=\mathrm{BMO}$。可以说,由于这个事实的发现,BMO 空间便成为调和分析的重要角色。发现$H^1(R^n)$的对偶空间是 BMO 空间,使人们对于这两个空间的认识更深入了。它们已经成了$L^p(R^n)(1\leqslant p\leqslant\infty)$空间理论的必不可少的补充。近年来,数学家还找到了$H^p$空间的许多其他特征,使$H^p$空间有许多推广。傅里叶分析、复分析、泛函分析以及偏微分方程的许多问题,都是在H^p空间与 BMO 空间中进行讨论的。此外,H^p空间理论也深入到概率论的鞅论中。

E. M. 斯坦和 C. 费弗曼还在调和分析中引入了 # 函数$f^{\#}(x)$,# 函数是证明算子L^p有界性以及在L^p与 BMO 之间引进内插的重要工具。

E. M. 斯坦对奇异积分做出了重要贡献。奇异积分又称考尔德伦-赞格蒙奇异积分算子,是一种特殊的积分变换,是一维希尔伯特变换到高维欧氏空间的推广,由 A. P. 考尔德伦和 A. 赞格蒙于 1952 年引入。他们就最基本与最典型的情形,证明了奇异积分算子的L^p可积性,这是奇异积分理论的奠基性工作。E. M. 斯坦、G. 韦斯和 C. 费弗曼在这个基础上,把奇异积分同哈代-李特尔伍德极大函数、面积积分、多元调和函数边界性质、李特尔伍德-佩利理论联系起来,组成了近代调和分析的主要工具。

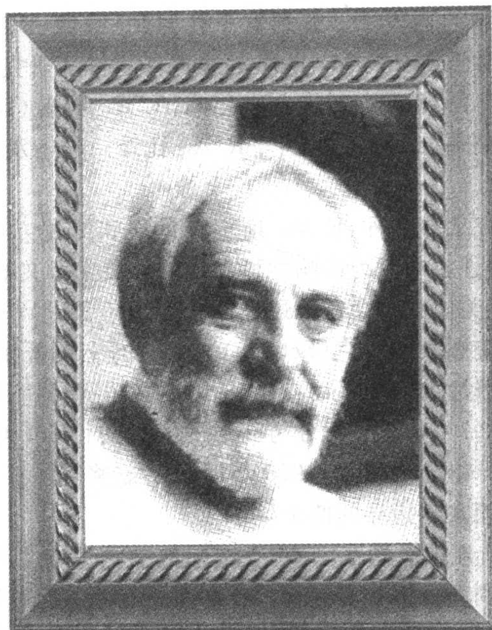
E. M. 斯坦对群论中的酉表示有重要建树。拓扑群G到希尔伯特空间$H(\neq 0)$上的酉算子群的强连续同态$U:g\rightarrow U_g(g\in G)$,称为$G$的酉表示。所谓$U$为强连续,是指对任意的$x\in H$,映射$g\rightarrow U_g x$是$G$到$H$内的连续映射。连通复半单李群$G$的不可约酉表示可以分为四种类型:① 主系列;② 退化系列;③ 补系列;④ 退化补系列。属于不同系列的G的两个表示绝不等价。人们

原先猜测,连通复半单李群的任意不可约酉表示,与属于以上四个系列中某一个的表示等价。E. M. 斯坦经过深入的研究,于 1967 年构造出不同于 I. M. 盖尔范德及 M. A. 奈玛克(Namark)得到的形式的不可约酉表示。缠结算子在佩利-维纳(Paley-Wiener)型理论中非常重要。E. M. 斯坦对这种算子作了研究,并于 1967 年与 R. A. 孔泽(Kunze)及 1971 年与 A. W. 纳普(Knapp)共同得出了重要结果。E. M. 斯坦与 R. A. 孔泽一起还发现了所谓孔泽-斯坦现象。

除了研究工作之外,E. M. 斯坦在论述和综述方面取得了重要成就,他的许多书成为影响学科发展的重要参考文献。为此,他荣获 1984 年美国数学会在论述方面的斯蒂尔奖。1993 年他还荣获瑞士科学院颁发的肖克(Schock)奖。他的主要著作有《极大函数对傅里叶级数的应用》(1958),《论与李特伍德-佩利理论有关的调和分析》(1970),《奇异积分与函数的微分的性质》和《欧几里得空间调和和分析导论》等。1978 年度菲尔兹奖得主 C. 费弗曼是他在普林斯顿大学指导的博士生。

E. M. 斯坦被邀请在 1986 年国际数学家大会上作了大会报告,题目是《调和分析中与振荡积分和曲率有关的问题》。他指出:“近十年来调和分析中一系列的进展使人体会到一些质朴的几何解释的日益增大的重要性,例如关于‘度量’的不同观念,关于‘曲率’的一些观念上的考虑等,这些性质的发掘时常紧密地联系于某些振荡积分算子的研究。”[149]

R. 博特
(Bott,Raoul)



“R. 博特是当代几何和拓扑学最杰出的数学家之一”。[157]

——A. 杰克逊(Jackson)

“我认为要成为一个数学家,应该喜欢去探寻事物的根本。”[145]

——R. 博特

R. 博特是匈牙利裔美国籍数学家,1923 年 9 月 24 日生于匈牙利首都布达佩斯。

由于他对拓扑学、李群理论、叶状结构和 K 理论做出的贡献,2000 年荣获沃尔夫数学奖,时年 77 岁。

R. 博特 1945 年和 1946 年在 McGll 大学先后获工学学士、工学硕士学位,随后转向数学,1949 年获 Carnegie 理工院的博士学位,1949—1951 年在美国普林斯顿高等研究所作学术访问,1951—1959 年在密西根大学任教(其间 1955—1957 这两年又到普林斯顿高等研究所从事研究工作),1959 年开始一直在哈佛大学任教到 1999 年退休。

R. 博特 1964 年当选为美国国家科学院院士,他还是伦敦数学会名誉会员、剑桥圣凯瑟琳学院的名誉成员。在 1980 年,1988 年和 1989 年先后被 Notre Dame 在学,McGill 大学和 Carnegie Mellon 大学授予名誉学位。

R. 博特在青少年时代对数学并未显示出特别的天赋和钟情,却对电子学很感兴趣,喜欢动手作小实验去探寻一些新东西。他拿到工学学位后开始从事应用数学的研究,并和他的论文导师 R. 达芬(Duffin)一起共同解决了一个颇为著名的问题,现在称作博特-达芬定理。这个问题是实践性的,被贝尔(Bell)实验室运用了好长一段时间。这个定理引起了当时任普林斯顿高等研究所教授、著名数学家 C. H. H. 外尔的关注,经过 C. H. H 外尔的斡旋,R. 博特被邀请到普林斯顿高等研究所进行学术访问。他本来到普林斯顿高等研究所是打算写一本关于网络理论的书,但到该所后却被那里浓厚的数学气氛所感染,他听了大量数学课,当他一年的访问期快结束的时候,该所另一位教授、著名数学家 H. M. 莫尔斯希望他在该所再待一年,他非常高兴的留了下来。在普林斯顿高等研究所这两年除了听数学课,他还参加了 C. H. H. 外尔、小平邦彦等数学家主持的有关调和形式的讨论班,从而打下了坚实的数学基础。他在 1984 年回忆起这一段难忘的学术经历时,曾

深情地说："普林斯顿这样的研究所的巨大优点之一就是在那儿所引起的那种兴奋，那种兴奋使得年青和年老的团结在一起，从而使年青人牢牢地与他们的学科连在一起。然而我还是禁不住被权威的'老人'的幻想所迷住。"[167]

R. 博特对数学做出了一系列的贡献，这里简要介绍其几项主要建树：

R. 博特最辉煌的成就之一是他在 K 理论中发现现在以他的姓氏命名的博特周期定理。所谓拓扑 K 理论，简单说就是一种广义上同调论，因而可以看做是以多面体的棱、面、顶点为背景的代数拓扑中，建立在诸如单形、复形、链群、边缘群等系列概念上的所谓"同调论"的"关系"。比如设 K 是多面体上一个复形，$C^q(K,G)$ 为 K 的以 G 为值群的 q 维上链群，$Z^q(K,G)$ 为 $C^q(K,G)$ 中 q 维上闭链(子)群，$B^q(K,G)$ 为 $C^q(K,G)$ 的上边缘链(子)群，则商群

$$Z^q(K,G)/B^q(K,G) \triangleq H^q(K,G), q=0,1,2,\cdots,n$$

即为 K 的 q 维上同调群。$Z^q(K,G)$ 关于模 $B^q(K,G)$ 的等价类叫做上同调类。如果两个上闭链群属于同一上同调类，则称它们是相互上同调的。那么，研究上同调关系及其规律的理论便叫做上同调论。K 理论是 M. F. 阿蒂亚和 F. E. P 希策布鲁赫引入的，他们根据 A. 格罗藤迪克代数几何学的思想，从向量丛的等价类构造 K 群，证明了微分流形的黎曼-罗赫定理。博特周期定理是 K 理论中的一个基本定理，它的最简单的形式是说，对任意(紧)空间 X，在环 $K(X)\otimes K(S^2)$ 和 $K(X\times S^2)$ 之间存在一个同构。更一般地，如果 L 是 X 上的一个复向量丛，且 $P(L\oplus 1)$ 是 $L\oplus 1$ 的射影化，那么环 $K[P(L\oplus 1)]$ 是只有一个生成元 $[H]$ 和惟一关系 $([H]-[1])([L][H]-[1])=0$ 的 $K(X)$ 代数，这里 $[E]$ 是向量丛 E 在 $K(X)$ 中的象，H^{-1} 是 $P(L\oplus 1)$ 上的霍普夫纤维丛。这个事实等价于 K 理论中关于复向量丛的托姆同构的存在性。特别地，$P(1\oplus 1)=X\times S^2$。这个定理最先是 R. 博特于 1959 年使用莫尔斯理论验证的，1964 年他又与 M. F. 阿蒂亚一起用 K 理论的

语言全新表述。这个博特周期定理建立了酉群 U 的稳定同伦型的性质，它就是 $\Omega^2 U \sim U$，这里 ΩX 是 X 的闭路空间，～是弱同调等价。特别地，对于 $i=0,1,\cdots,\pi_i(U)=\pi_{i+2}(U)$，这里 π_i 是第 i 个同伦群。类似地，对正交群 O：$\Omega^8 O \sim O, \pi_i(O)=\pi_{i+8}(O)$。如今，$K$ 群的理论加上博特周期性，在微分拓扑学中得到了有效的应用，如球面上向量场问题的解决，射影空间的嵌入问题等等。

R. 博特早在 1954 年在关于大范围变分法中，发现所有测地线都是长度一定的单一闭测地线那种黎曼流形，与阶数为 1 的紧型对称黎曼空间，具有相同的整系数的上同调环。

R. 博特与 M. F. 阿蒂亚及 L. 加丁(Garding)还发展了由И. Г 彼得罗夫斯基(Петровский)开创的双曲型算子的隙窝理论。

R. 博特与 M. F. 阿蒂亚还将莱夫谢茨不动点定理推广到包括椭圆复形的情形，讨论了紧微分流形及横截的微分映射。这个推广使得不动点定理应用到各种研究领域，例如障碍理论、伪微分算子理论等等。

R. 博特对叶状结构有深入的研究并做出了贡献。一个叶状结构是满足可积条件的切丛的子丛。R. 博特发现可积性有拓扑结果。若有一个向量丛是切丛的子丛，那么在它的同构类中存在一个确定的将它变形(deform)为可积的子丛的障碍。它的示性类必须满足的消失条件。这项工作自然导致了叶状结构的异种(exotic)示性类，也就是广义的 Godbillon-vey 不变量。

R. 博特对李群理论、指标理论等也做出了重要贡献。

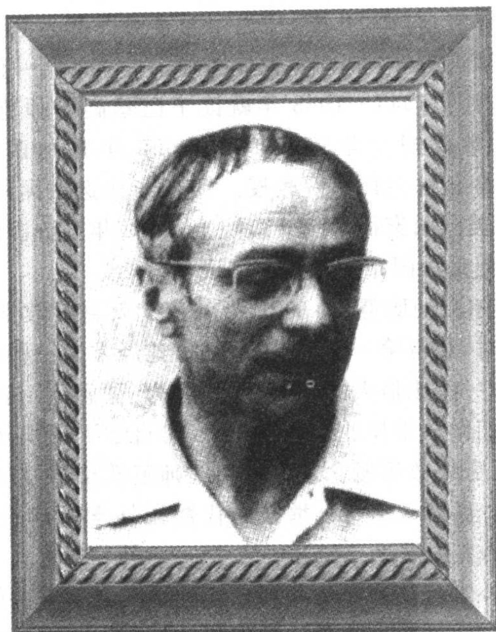
R. 博特是著名的拓扑学家，他曾在 1958 年和 1970 年两次被邀请在国际数学家大会上作报告。他在获沃尔夫奖之前，于 1964 年荣获美国数学会的维布伦奖，1987 年被授予美国科学院奖章，1990 年荣获美国数学会颁发的斯蒂尔终身成就奖。1979 年度的菲尔兹奖得主 D. 奎伦在哈佛大学时曾师从于他。R. 博特的专著有《莫尔斯理论对李群拓扑的应用》，《K(x)教程》，《齐性向量丛》等。

R. 博特对数学发表了不少精辟的见解。例如，他说："我认为要成为一个数学家，应该喜欢去探寻事物的根本。……在一个领域，如果不是开辟而只是跟随别人是一个问题。你必须相信你的本能，坚信你在某个问题上能取得突破，并做出贡献。"[145]谈到数学中哪些是核心领域时，R. 博特说："不会只有一条主道，……我确信影响数学的有许多完全不同的文化。如果你认为只有惟一的一条好的主快道，那将是非常危险的，因为那样人人都要往这条路上挤。"[145]他还说"我常常不怎么喜欢当今表现数学方式，而喜欢以前的老方式，以前总是用例子来说明证明思想，而不是故弄玄虚。……我喜欢经典数学的神奇之所在，我的本能总是尽可能把事情弄明白。"[145]

R. 博特对斡旋、引导他进入数学殿堂的 C. H. H 外尔十分敬仰，20 世纪 80 年代末，在一次纪念 C. H. H 外尔的专题讨论会上他应邀作了题目为《论诱导表示》的报告，在报告快结束时他说："让我最后引用 C. H. H. 外尔的一段话作为结尾，这段话陈述了对我们这个科学的信念，我想我们大家都会有同感，并且我希望我所叙述的那些进展，有助于阐明他的一段话。C. H. H. 外尔这一段话如下：

数学问题并非虚无缥渺的问题
其中萌动着思想的生命
通过人类在其历史存在中拚搏
思想得以具体实现
构成一个不可割裂的统一体
超越任何一门具体的科学。"[168]

J. P. 塞尔
(Serre, Jean-Pierre)



"J. P. 塞尔是我所称做'聪明的数学家'的典范。……凡他所理解的东西在他头脑中是如此水晶般地明晰。"[139]

——R. 博特(Bott)

"论文应含有更多的注记、未解决的问题等，这常常比精确证明了的定理更使人感兴趣。哎，大多数人害怕承认他们不知道某些问题的答案，结果克制自己不提这些问题，即使这些问题是很自然会出现的。这太遗憾了！至于我自己，我很乐意说'我不知道'。"[138]

——J. P. 塞尔

J. P. 塞尔是法国数学家,1926年9月15日生于法国巴热斯。由于他对代数拓扑,复几何、代数几何、数论、群论等诸多领域的杰出贡献,于2000年荣获沃尔夫数学奖,时年74岁。他还于1954年荣获菲尔兹奖,时年28岁,是迄今为止荣获菲尔兹奖时最年轻的一位数学家。另外,2003年他成了阿尔贝奖的第一位得主。

J. P. 塞尔于1944—1948年就读于巴黎高等师范学校,1950年在巴黎大学获博士学位。1954—1956年在纳西大学任教,1956—1994年任法兰西学院教授。1977年当选法国科学院院士,1979年当选美国国家科学院外籍院士,1982年当选国际数学联合会副主席。他是法国布尔巴基学派成员。

J. P. 塞尔自幼聪慧、勤奋,从七八岁起就喜欢数学,参加小学优等生会考时,获得第一名。在中学时,他经常做一些高年级的数学题,当时有一些比他大的同学欺侮他,为了"感化"他们,J. P. 塞尔就帮助他们做数学作业。他在14岁时自学了微积分,熟悉了导数、积分和无穷级数等概念。他在高等师范学校学习时,参加了著名数学家H. 嘉当(Cartan)举办的代数拓扑学讨论班,并在其指导下研究代数拓扑学。

代数拓扑学是拓扑学中主要依赖代数工具来解决问题的一个分支。同调与同伦的理论是代数拓扑学的两大支柱。在同调理论研究领域里,自J. H. 庞加莱(Poincaré)首先建立可剖分空间的同调理论之后,数学家们试图对不一定可剖分为复形的一般拓扑空间建立同调理论。后来出现了好几种关于一般空间的同调论。为了达到统一与简化的目的,S. 艾伦伯格(Eilenberg)与N. E. 斯廷罗德(Steenrod)在20世纪40年代中期倡导用公理法来引进同调群。这种观点不仅使人们对古典的同调论看得更清楚,同时也为广义同调论的兴起创造了条件。具有各自几何背景的各种广义同调论的出现大大开拓了代数拓扑学的领域,提高了用代数方法解决几何问题的能力。广义同调的表示定理表明,可以在同伦概念的基础上来建立同调论。

J. P. 塞尔对同调论和同伦论的建立和发展做出了重要贡献。自从1951年他在《数学年刊》上发表有关同伦群的博士论文(他在这篇博士论文中对群 $\pi_i(S^n)$ 的结构进行了阐释,证明了若干一般性的定理)后,他的工作所产生的影响和冲击力一直十分引人注目。例如,他对纤维空间引入了普序列这种代数方法,而在同伦群中以他的姓氏命名的塞尔 $\mathscr{C}$ 理论,就有效地应用了纤维空间的普序列、n 连通纤维空间等概念。他和 H. 嘉当等人在重要空间的上同调运算及同伦群等方面,都取得了显著进展并一直延续至今。

同调与同伦是实质上不同的概念。对于同调与同伦的关系进行深入研究的结果促使同调代数迅速发展起来。J. P. 塞尔在20世纪50年代初就在同调代数方面做了许多重要工作,从而促进了同调代数这门学科的诞生。同调代数这个重要工具形成之后,不仅对代数拓扑产生了巨大影响,也深深渗入到其他数学分支中去,如代数、代数几何、泛函分析、微分方程、复分析等等。

J. P. 塞尔对代数几何也做出过许多重要贡献。例如:他与C. 谢瓦莱(Chevalley)等人把交换代数,特别是局部代数这个有力的方法引入代数几何;以层的概念为基础的簇的定义也是J. P. 塞尔给出的;他还以凝聚解析层理论为模型建立了凝聚代数层理论以及凝聚层的上同调理论,这为A. 格罗腾迪克(Grothendieck)随后建立概型理论奠定了基础,而概型理论的建立又使代数几何的研究进入了一个全新阶段;他还阐明了算术亏格等古典不变量都是上同量;特别是在1955年,他发表了一篇经典论文,首次大范围地将同调代数用于代数簇研究,并提出了关于在代数函数环上投影的结构的一个重要猜想,即多项式环上每个射影模必定是自由模。这个猜想现在称为塞尔猜想,后来由1978年度菲尔兹奖得主D. 奎伦(Quillen)证明。

从20世纪60年代起,J. P. 塞尔又把他的研究领域扩展到了数论,并推动了数论的重大进展。例如,他在证明"韦伊猜想"方面起到了极大的作用。他在20世纪80年代中期提出的"关于模伽

罗瓦表示的水平约化猜想”,对促进“费马猜想”的最终证明也起到了很大的推动作用。

在多复变函数论中 J. P. 塞尔也有重要建树。他与 H. 嘉当系统地应用凝聚层理论建立了施泰因流形的基本定理。

世界著名的斯普林格(Springer)出版社于 1986 年出版了一部三卷本的《塞尔文集》。这部文集共 2 064 页,收集了 J. P. 塞尔到 1984 年为止的大部分数学论文,包括若干未发表过的文章和许多很难归入正式数学文献的文字。2000 年该出版社,又出版了《塞尔文集》第四卷。他的这些研究论文及综述性文章题材广泛,涉及拓扑学、多复变函数论、代数几何、数论、群论、交换代数和模型式。这些论文极富启发性,反映出他深邃的洞察力,对于在这些领域探索的数学家颇有裨益。

《塞尔文集》的一大特色是包含了许多由他提炼的尚未解决的问题,他还在文集中对今后的研究方向提出忠告。这部文集是在 J. P. 塞尔本人的指导下编辑的,他对书中的每篇文章都加了评注并作了修正,还叙述了那些未解决问题目前的研究现状和可参考的最新进展。他的论著是思想的独创性和论述的清晰性的完美结合。英国著名数学家 J. F. 亚当斯(Adams)称赞 J. P. 塞尔的每一篇文章都值得一读。美国著名数学家 R. 博特说:“J. P. 塞尔是我所称做‘聪明的数学家’的典范。……凡他所理解的东西在他头脑中是如此水晶般地明晰。”[139]

J. P. 塞尔还于 1985 年荣获意大利的巴尔赞奖,1995 年荣获美国数学会颁发的斯蒂尔著述奖,他是因《算术教程》一书而荣获此奖的。此书的法文版于 1970 年出版,英译本于 1973 年出版,其后又多次再版,目前中译本也已经面世。这本书的特色是把数论的前沿领域(二次型、L 函数、艾森斯坦级数、赫克算子等)的基础知识非常精炼地浓缩在不到 100 页的一本书中,并且叙述清晰明澈。

J. P. 塞尔对于数学发表过许多精辟的见解。对于中学的数

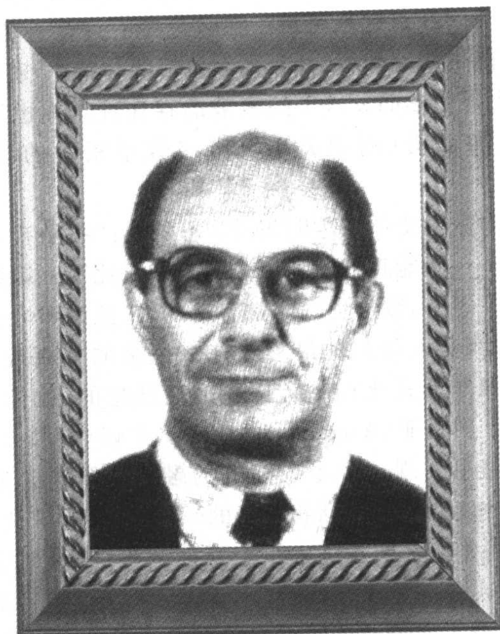
学教育，他曾指出："对于中学生，关键是要让他们明白数学是活生生的，而不是僵死的(他们有一种倾向，认为只有在物理学或生物学中有尚未解决的问题)。讲授数学的传统方法有个缺陷，即教师从不提及这类问题。这很可惜。在数论中有许多这类问题，十几岁的孩子就能很好地理解它们：当然包括费马猜想，还有哥德巴赫猜想，以及无限个形如 n^2+1 的素数的存在性。你也可以随意讲些定理而不加证明(例如关于算术级数中素数的狄利克雷定理)。"[138]

在谈到对数学史的兴趣时，J. P. 塞尔说："我早有兴趣了。但这绝非易事……我能理解写一篇数学史文章比写一篇数学论文要花更多时间。还有，数学史是非常有趣的，它把诸事恰如其分地展现出来。"[138]当有人问到他最喜欢什么风格的书籍或文章时，他说："精确性和非形式化相结合！这是最理想的，就像讲课那样。你会在 M. F. 阿蒂亚(Atiyah)和 J. W. 米尔诺(Milnor)以及其他一些作者的书里发现这种令人陶醉的融合。但这极难达到。例如，我发现许多法文书(包括我自己的)有点过于形式化，一些俄文书又不那么精确。……我进一步想要强调的是，论文应含有更多的注记、未解决的问题等，这常常比精确证明了的定理更使人感兴趣。哎，大多数人害怕承认他们不知道某些问题的答案，结果克制自己不提这些问题，即使这些问题是很自然会出现的。这太遗憾了！至于我自己。我很乐意说'我不知道'。"[138]

J. P. 塞尔不仅是一位博学多才的数学家，而且为人谦和，极受同行的拥戴。在他过 50 岁生日的时候，世界上许多著名数学家都写文章祝贺，《数学发明》杂志还专门用了 35、36 整整两卷的篇幅发表了其中 30 多篇庆贺塞尔生日的文章，可见他是何等地受人敬重。

V. I. 阿诺尔德

(Arnold, Vladimir Igorevich)



“V. I. 阿诺尔德在 19 岁的时候，就因证明每一个三个变量的连续函数都可以表为几个两个变量的连续函数的叠加，而一举成名。”[142]

——S. 兹德拉弗科夫斯卡(Zdravkovska)

“纯粹数学和应用数学仅仅是社会学的区分，两者之间并不存在严格的科学的界线。‘纯’的数学家较着眼于数学本身，而‘应用’的数学家则较多致力于解决特殊的问题。”[143]

——V. I. 阿诺尔德

V. I. 阿诺尔德是俄国数学家，1937 年 6 月 12 日生于与敖德萨，由于他在数学众多领域深刻而影响广泛的工作，包括动力系统、微分方程和奇点理论，于 2001 年荣获沃尔夫数学奖，时年 64 岁。

V. I. 阿诺尔德 1954 年进入莫斯科大学学习，1959 毕业，1961 年获莫斯科大学副博士学位，1963 年获莫斯科大学博士学位，其后在莫斯科大学任教直到 1986 年，继而在苏联科学院数学研究所工作。

V. I. 阿诺尔德是俄国科学院院士，美国国家科学院国外院士，巴黎科学院国外院士，伦敦皇家学会会员。他在获沃尔夫数学奖之前，就获得过多种荣誉及奖励，其中包括：1958 年获莫斯科数学会的青年数学家奖；1965 年获苏联政府颁发的列宁奖；1982 年获瑞典皇家科学院颁发的克雷福德（Crafoor）奖；1992 年获罗巴切夫斯基奖；1994 年获哈里（Harrey）奖。

V. I. 阿诺尔德才华横溢，是苏联著名数学家 A. N. 柯尔莫哥洛夫的高足。早在莫斯科大学读本科时，就对希尔伯特第 13 个问题的研究取得了重大进展。希尔伯特第 13 个问题是：用两个变量函数解一般七次方程不可能性，即：七次方程 $x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$ 的根依赖于三个参数 a、b、c，$x=x(a,b,c)$，这一函数能否用两个变量函数表示出来？1957 年，V. I. 阿诺尔德证明每一个三个变量的连续函数均可表示为几个两个变量的连续函数的叠加，从而对连续函数的情形解决了希尔伯特第 13 个问题，当时他年仅 19 岁，并于 1958 年荣获了莫斯科数学会颁发的青年数学家奖，跻身于数学家行列。

V. I. 阿诺尔德 1959 年就已参与建立哈密顿动力系统的 KAM 理论。动力系统理论是经典常微分方程理论的一种发展。早在 1881 年起的若干年里，J. H. 庞加莱开创了常微分方程定性理论的研究，所讨论的课题（如稳定性、周期轨道的存在及回归性等）以及所用到的研究方法都成为后来动力系统这一数学分支的

创始性思想。G. D. 伯克霍夫从 1912 年起若干年里，以三体问题为背景，扩展了动力系统的研究，包括他得出的遍历性定理。在天体力学或哈密顿力学的领域中的诸多课题，特别是遍历理论的数学研究不断深入的过程中，这一理论的最初目标（证明各种具体的哈密顿力学系统的遍历性）始终是人们最重视的问题之一。有一类哈密顿系统称为可积系统，这种系统的能量面分解成一些不变环面，每一轨道在所属的环面上运动。这样的系统不能在整个能量面上具有遍历性。原来人们以为这种情形或许是少数例外，或许经过小扰动之后就会消失。从 20 世纪 50 年代到 60 年代，A. N. 柯尔莫哥洛夫、V. I. 阿诺尔德及 J. K. 莫泽对这一情况进行了深入研究，共同建立了以他们的姓氏共同命名的 KAM 理论（其中 K 指 Kolmogorov，A 指 Arnold，M 指 Moser），即关于哈密顿系统方程组的解的稳定性理论。这个理论建立的主要经过如下：1954 年 A. N. 柯尔莫哥洛夫首先提出，对于某些力学系统，在某种意义下大多数解都是拟周期的，并指出了一个可能的解法。1963 年 A. N. 柯尔莫哥洛夫的学生年仅 25 岁的 V. I. 阿诺尔德完全严格的证明了在解析情况下这种解的存在性，从而崭露头角。与此同时，J. K. 莫泽也给出了一种特殊情形的证明，而且又把 V. I. 阿诺尔德的解析条件拓宽为多次可微条件，由此给出了光滑情况下的完整证明。他们指出：在哈密顿系统的小扰动之下，大多数环面都不会消失，而只是形状稍有改变。KAM 理论是哈密顿系统，特别是它的定性理论的近代发展中的最重要的成就。KAM 理论还使 P. S. 拉普拉斯提出的已历时 200 年的太阳系稳定性问题得到了重要突破。KAM 理论无论从微分方程方面，还是天体力学方面来看，都具有重大意义，在科学上有广泛应用。例如，在天体力学和在等离子储备系统里磁力线的特性的研究中，得到了大量应用。V. I. 阿诺尔德在参与建立 KAM 时，还发现了现在以他的姓氏命名的阿诺尔德扩散。所谓阿诺尔德扩散是指在拟周期运动中，若 $n=2$，等能曲面是三维的，而其上的不变 KAM 环面是

二维的，并将等能曲面分裂为相离的小块。结果是，不在不变环面上的轨道将被约束在这些环面之间。如果环面的频率可微地依赖于定义这些频率的作用量变量的值，在一点由等级非退化条件来保证，则作用量变量对于一切初值均停留在初值附近而不会有久期扰动现象。若自由度多于2，则不变环面不会把等能面分裂为相离的小块，而即令在等能非退化条件下，作用量变量确实可能漂移离开其初值。这个现象称为“阿诺尔德扩散”。V.I. 阿诺尔德在研究哈密顿动力学时，还引进了“间隔互换”。由于 V.I. 阿诺尔德在扰动理论的工作他在 1963 年获得博士学位，并于 1965 年与 A.N. 柯尔莫哥洛夫联袂获得苏联的最高荣誉奖——列宁奖。

V.I. 阿诺尔德对奇点理论做出了重要贡献。所谓奇点，从分析意义看即非光滑点；从动力系统看即(一般)轨线非惟一的点；从映射意义上讲即降秩(具有投影性)点，所以奇点在映射中是一类特殊点，常常是零测度的；而正常点(也叫正则点)是多数，为非零测度。而可微映射的奇点理论是一门年轻的数学分支。追溯其历史渊源，有 20 世纪 30 年代的 H.M. 莫尔斯的临界点理论，20 世纪 40 年代 H. 惠特尼的微分流形嵌入、浸入的有关奇点的工作，以及 L.S. 庞特里亚金(Pontrjagin)与 H. 惠特尼等人研究的与示性类有关的奇点方面的工作。这一时期是奇点理论的萌芽时期。1955 年 H. 惠特尼发表了关于把平面映射到平面的映射奇点的工作，标志着奇点理论开始作为一门独立的分支登上了数学的舞台。1956 年，R. 托姆发表了一篇题为《可微映射的奇点》的论文，对以后整个奇点理论的发展提出了一个纲领式的描述。1960 年，R. 托姆在波恩又作了一系列的演讲，把他的纲领式的描述具体化。V.I. 阿诺尔德在 H. 惠特尼和 R. 托姆的工作基础上，在奇点方面取得了重要成就。他是焦散面(caustics)和波阵面(wars fronts)的奇点与变态的理论的创立者，他发现这些对象与正多面体的几何晶体的对称群之间的联系，这个理论最重要的结果就是他的光滑函数的临界点的分类。他还把奇点分类应用在物理学中

的振荡积分的计算上。他又把奇点与李群、李代数相结合，大大扩展了这个领域。他还描述了光滑子流形的辛奇点理论。

V. I. 阿诺尔德还找到了一种研究理想气体的流体动力学的新方法，就是把理想气体的欧拉方程，看做是保体积的微分同胚组成的无穷维李群上测地线的方程。他证明了这个群在许多方向上的截面曲率都是负的。这种负曲率的存在，是这种流体运动具有不可预测性的原因。

实代数几何近30多年来的迅猛发展，也始于V. I. 阿诺尔德1971年的一篇专论实代数曲线的卵形线的位置的文章。他的这篇文章把实代数几何与现代拓扑学联系了起来，建立了实代数几何的俄国学派。

V. I. 阿诺尔德还发现了庞加莱定理的高维推广，在辛几何和变分法中引起了反响。

V. I. 阿诺尔德还撰写了多本著作，其中有两本著名的教科书，一本是《常微分方程》(1975)，另一本是《经典的数学方法》(1974)。他曾两次被邀请在国际数学家大会上作大会报告。

V. I. 阿诺尔德不但是一位博学多才的数学家，也是一位优秀的教师。他创造活动的大部分是由他与其学生合作完成的，从而使他的不少学生成了当代杰出的数学家.

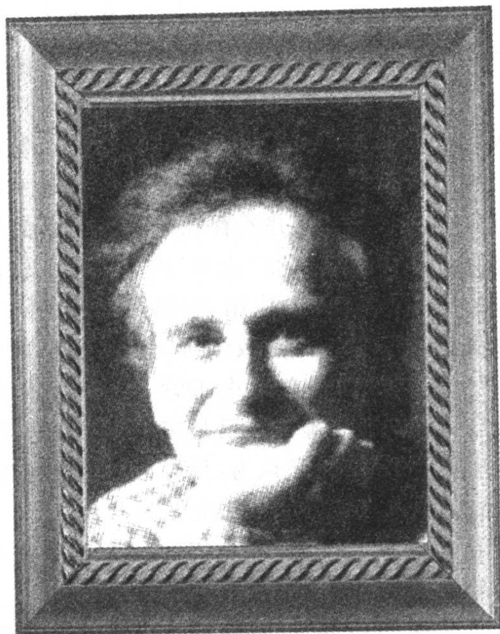
V. I. 阿诺尔德写了不少综述性、评论性文章，对数学发表了许多见解。例如：他说，“数学有一个人们所不能不赞叹的性质，就是它的一些分支极抽象，乍一看毫无用处，然而它们的美具有超凡的效能”。[142]他在1992年题为《为什么我们要学数学》的演讲中说：“学习数学的目的是什么？1267年英国著名哲学家罗吉尔·培根就已经回答了这个问题：‘不懂数学的人就不能认识其他任何科学，甚至不能意识到自己无知。’本来，可以就此结束演讲，但人们总是会想是不是7个世纪中有了什么变化……让我们听一听更现代的见证——量子力学的创始人之一波·狄拉克的见解，他指出，创建物理理论时，‘不要相信所有物理概念。’那么应该相信什

么呢?'相信数学方案,虽然表面上看上去,它与物理学并无联系。'的确20世纪初期的所有纯物理概念被物理学所摒弃,而被物理学家作为武器的数学模型却逐渐有了物理内容,同时也显示了数学的稳定性。于是在自然科学中,数学建模成为一种有效的方法。"[144]谈到纯粹数学和应用数学时他指出:"当代的数学回归自然科学主流的现象,在最近的几十年中随处可见;但是,它们尚未在'市井平民'心目中有关数学家和数学的观念中反映出来。这对'纯粹的'和'应用的'数学都是如此。……纯粹数学和应用数学仅仅是社会学的区分,两者之间并不存在严格的科学的界线。'纯'的数学家较着眼于数学本身,而'应用'的数学家则较多致力于解决特殊的问题……当今数学的应用,包括'计算机科学'以及计算机的应用,是在前几代人的'纯'数学研究积蓄的丰富宝库之上得以实现的。"[143]他还在一篇文章中批评,在国际数学家大会上"……有的报告人更多的是显示自己是多么伟大的科学家,而不是多为听众带来些什么。他们还认为,只要自己的报告高深莫测,就足以达到自己的目的(在分组报告中尤其如此)。"[143]

V. I. 阿诺尔德认为:"应该让我们的教育工作者不要追逐眼前的需要,而要永远看到社会的发展前景。"[144]

V. I. 阿诺尔德1995年12月5日—11日应中国数学会邀请曾来我国访问,他当时担任国际数学联合会的副主席,对我国申办2002年国际数学家大会表示了很大的兴趣,并专程考察了北京国际会议中心,他在北京期间和我国数学家进行了学术交流,还分别在中国科学院数学研究所及北京大学数学科学院作了学术演讲,题目分别是"Singularites theory and applications"及"Symplectic tapology and wave front propagation"。

S. 谢拉赫
(Shelah, Saharon)



“S. 谢拉赫多年以来一直是数学基础和数理逻辑的领头人物。”

——摘自：Arnold and Shelah Receive 2001 Wolf Price. Notices of the American Mathematical Society，2001，48(5)：503—504

“由于我喜欢做数学研究，所以我觉得去解决一个问题比去争论它可能的重要性更为有趣。”[150]

——S. 谢拉赫

S. 谢拉赫是以色列数学家，1945 年 7 月 3 日生于耶路撒冷。

由于他对模型论和现代集合论的贡献，特别是发展了真力迫理论、稳定性理论等重要理论和工具，2001 年荣获沃尔夫数学奖，时年 56 岁。

S. 谢拉赫 1964 年毕业于特拉维夫大学，1667 年和 1669 年先后获希伯来大学硕士学位和博士学位。1969—1970 年在美国普林斯顿大学工作，1970—1971 年在洛杉矶工作，之后回到母校希伯来大学任教至今，自 1986 年起兼任 Rutgers 大学的访问教授。

S. 谢拉赫是以色列科学院院士和美国艺术与科学研究院院士。

S. 谢拉赫是数理逻辑领域公认的领袖人物之一，他对数理逻辑中的模型论和公理集合论都做出了杰出的贡献。

数理逻辑又称符号逻辑、理论逻辑或逻辑斯蒂，是用数学方法研究的逻辑或形式逻辑。所谓数学方法就是指数学采用的一般方法，包括使用符号和公式，使用已有的数学成果和方法，特别是使用形式的公理方法。形式的公理方法也称为逻辑斯蒂法。由于数理逻辑的学科性质，它自然地成为一门数学，即逻辑底数学。用数学方法研究逻辑的系统的思想一般可溯源到 G. W. 莱布尼茨(Leibniz)时期，萌芽于古希腊的亚里士多德(Aristotle)时期。

S. 谢拉赫对模型论极有建树。模型论是数理逻辑的一个分支，是研究形式语言及其解释(模型)之间的关系的理论。一个形式语言 L 的解释 U 称为此语言的一个模型或结构。U 是一个具有若干运算、关系及特指元素的非空集合，也称为泛代数。所以模型论又被形容为“泛代数＋逻辑”。在 20 世纪 20 年代，A. T. 斯科朗(Skolem)等人在数理逻辑研究中就已得到模型论性质的重要结果，但作为系统的理论，模型论的奠基人首推 A. 塔尔斯基(Tarski)。S. 谢拉赫在他们工作的基础上取得了一系列的成就。这里，我们仅介绍他的几项最主要的成果：① 以他的姓氏命名的基斯勒-谢拉赫(Keisler-shelah)同构定理。此定理说，设 M 和 N

为两个结构,M 和 N 为初等等价的充分必要条件是,存在一个非空集 I 和 I 上的极大滤子 D,使得 M^I/D 和 N^I/D 是同构的。② 在关于势的范畴性。S. 谢拉赫解决了洛斯(Loŝ)曾猜想。J. 洛斯猜想,对于某个 $k>\overline{\overline{L}}$($L$ 的基数),Γ 是范畴于 k 的。M. 莫迪(Mordy)在一种特定的情况下先肯定地解决了这个猜想,而 S. 谢拉赫则在一般的情况下解决了这个猜想。③ S. 谢拉赫在形式理论的稳定性及模型个数方面有深刻的研究,还解决了在一大类无穷长语言中完备理论的模型个数问题。④ 他证明了怀特海猜想的不可判定性。1952 年英国拓扑学家 J. H. C 怀特海(Whitehead)曾提出,是否每个 W 群都是自由群?(所谓 W 群是,设 A 为一可换群,Z 为整数加群,如果每个正合列 $0\rightarrow Z\rightarrow B\rightarrow A\rightarrow 0$ 都是分裂的。)1974 年,S. 谢拉赫证明了:(a) 如果在通常的集合公理系统 ZFC 之外加用新公理 $V=L$(可构成公理),则每个基数为 ω_1(第一个不可数基数)的 W 群都是自由群;(b) 如果在 ZFC 之外加用新公理 $MA(\omega_1)$(ω_1-Martin 公理),则存在基数为 ω_1 的非自由 W 群。对于更大的基数,S. 谢拉赫也证明了类似的结果。这就说明了怀特海问题对于 ZFC 的独立性,因而此问题是不能在通常的朴素集合论中解决的。

S. 谢拉赫对公理集合论也极有建树。公理集合论也是数理逻辑的一个分支,是用公理化方法重建(朴素)集合论的研究以及集合论元数学和集合论的新的公理的研究。E. F. F. 策梅洛(Zermelo) 于 1908 年首开先河,提出了第一个集合论公理系统,旨在克服集合论中出现的悖论。20 世纪 20 年代,A. A. 弗伦克尔(Fraenkel)和 A. T. 斯科朗(Skolem)曾予以改进和补充,从而得到常用的策梅洛-弗伦克尔公理系统,简记为 ZF。ZF 是一个形式系统,建立在有等词和属于关系"∈"的一阶谓词演算之上。它的非逻辑公理有:外延公理、空集公理、无序对公理、并集公理、幂集公理、无穷公理、分离(子集)公理模式、替换公理模式、正则(基础)公理。如果另加选择公理(AC),则所得到的公理系统简记为 ZFC

(这里的 ZFC,即前面 S. 谢拉赫在证明怀特海猜想中的 ZFC)。力迫法是一种构造公理系统的模型的方法,由 P.J. 科恩(Cahen)于 1963 年为证明连续统假设的否定(¬CH)与 ZF 相协调而提出的。随着力迫理论方面的突破即迭代力迫的建立,S. 谢拉赫和 J. 鲍姆格特纳等的正常力迫法的工作除了又有许多命题的相对和谐性得到证明之外,提出来的相应条件又促进了组合集合论的发展。

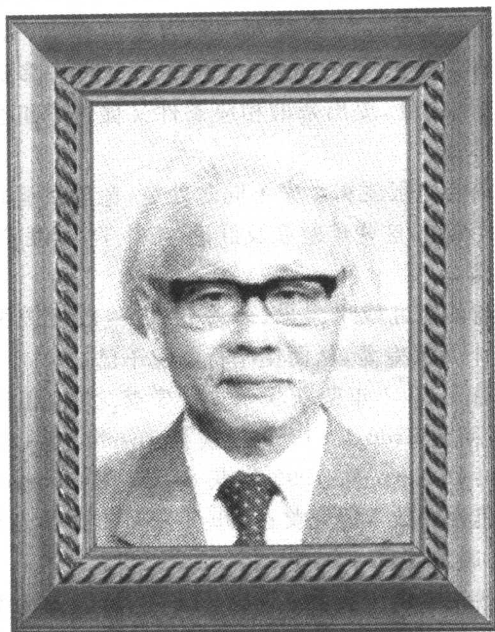
S. 谢拉赫与一般逻辑学家不同之处是,他能用逻辑方法解决一系列纯数学难题,这些难题涉及群论、拓扑学、测度论、巴拿赫空间、组合学等等。

S. 谢拉赫的研究成果累累、著述如林,他已发表了 700 多篇论文,出版了十几部专著,从而使同行赞叹不已。

S. 谢拉赫在 2001 年荣获沃尔夫数学奖之前,还先后获得下列荣誉:1977 年获 Erdo 奖;1982 年获 Rothschid 奖;1983 年获符号逻辑协会的 C. Karp 类;1992 年获 SIAM 的 George Pòlya 奖;1998 年获以色列的数学研究奖;1999 年获日本数学会奖;2000 年获匈牙利科学院的 János Bolyai 奖。

S. 谢拉赫说:“由于我喜欢做数学研究,所以我觉得去解决一个问题比去争论它可能的重要性更为有趣。所以我很高兴去解决一个问题,仅仅因为这个问题被认为是困难的或者是重要的。”[150]关于一个定理的美,他指出:“一个定理的美并不是由先前的描述来定义的,它更像一件艺术作品的美,就是说,(通过我们现有的知识)虽然评论家能够指出为什么我们喜欢它,或者为什么它重要,而且我对此还可以给出更多的评论,但是我们却不能对定理的美给出精确的定义。‘蒙娜丽莎’从来没有被证明是伟大的艺术品,不同时代的艺术评论家有不同的看法,但是我们现在仍在欣赏它。”[150]

佐藤幹夫
(Mikio Sato)



“佐藤幹夫导入所谓的佐藤超函数并展开了‘代数分析’，他与小松彦三郎、森本光生、河谷隆裕、柏原正树、三轮哲二、神保道夫等多人合作，在应用物理学方面也做出了显著的贡献。”[151]

——弥永吉昌

“有人说数学的各个领域中的主流经常发生变化，但我认为这只是一种表面的流行说法，数学的底流恐怕没有什么变化。”[152]

——佐藤幹夫

佐藤幹夫是日本数学家,1928 年 4 月 18 日生于东京。

由于他创立了代数分析学包括超函数以及微函数理论,荣获 2003 年的沃尔夫数学奖,时年 75 岁。

佐藤幹夫就读于东京大学,1952 年获该校理学学士学位,1963 年获该校博士学位。他在 1970 年进入京都大学数理解析研究所之前,先后任教于大阪大学和东京大学。1987—1991 年任京都大学数理解析所所长,现任京都大学名誉教授。1993 年当选美国国家科学院的外籍院士。

佐藤幹夫以代数分析学和数学物理学的眼光开创了数学的若干基本分支。他创造了超函数理论,并且发现了可供刻画在余切丛上超函数的奇异性结构之用的微局部的分析学。由于此研究方法涉及同调代数,故名代数分析。

佐藤幹夫成就中最耀眼的是佐藤超函数。佐藤超函数是在实解析流形上可定义比施瓦尔茨(Schwartz)广义函数更为一般的函数:

把 $\boldsymbol{R}^1$ 看做嵌入在 $\boldsymbol{C}^1$(=复数平面)内,考虑在 $\boldsymbol{R}^1$ 的复邻域(包括 $\boldsymbol{R}^1$ 的开集)U 除掉 $\boldsymbol{R}^1$ 的集合 $U-\boldsymbol{R}^1$ 上解析的函数 $F(z)$,这样两个函数 $G(z)$ 和 $F(z)$ 之间的等价关系定义为 $F(z)-G(z)$ 能开拓为 $\boldsymbol{R}^1$ 的某个复邻域上解析的函数。关于这种等价关系的等价类称为 $\boldsymbol{R}^1$ 上的**佐藤超函数**(hyperfunction),$F(z)$ 所属的类,形式地写作 $F(x+i0)-F(x-i0)$。这可以说是解析函数边界值概念的推广。超函数 $F(x+i0)-F(x-i0)$ 的广义导数,可以由 $dF(z)/dz$ 所属的类自然地给予定义。

把这个定义推广到 $\boldsymbol{R}^n$。命 $U_1,U_2,\cdots U_n,V_1,V_2\cdots V_n,W_1,W_2,\cdots W_n$ 为 $\boldsymbol{R}^1$ 的复邻域。$\varphi(z),\varphi(z)$ 为分别在

$$(U_1-\boldsymbol{R}^1)\times\cdots\times(U_n-\boldsymbol{R}^1),(V_1-\boldsymbol{R}^1)\times\cdots\times(V_n-\boldsymbol{R}^1)$$

上解析的函数。φ 和 ψ 之间的等价关系定义如下:当存在 $W_j\subset U_j\cap V_j(j=1,2,\cdots n)$,又存在在 $(W_1-\boldsymbol{R}^1)\times\cdots\times W_j\times\cdots\times(W_n-\boldsymbol{R}^1)$(第 j 个只有 W_j)上解析的函数 $x_j(z)$,使得

$$\varphi(z)-\psi(z)=\chi_1(z)+\cdots+\chi_n(z)$$

时，则 $\varphi\sim\psi$。关于这个等价关系的等价数称为佐藤超函数。在 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 Ω 上也可以用同样的方式定义超函数。

用系数在解析函数的层中的相对上同调理论，可以给出与坐标系选择无关的，更自然的且与上面的定义等价的定义。也可以把佐藤超函数定义为支集在 R^n 中的解析泛函的局部有限和。他除了首先引进上述超函数的概念外，他还第一个证明了佐藤超函数的局部性质，并把这个理论推广到高维情形。

现在已经发现广义函数是超广义函数，而超广义函数可以嵌入到佐藤超函数中，超广义函数有如同广义函数一样的局部性质。佐藤超函数和超广义函数在微分方程理论中是很有用的。

19 世纪以来，数学中定义和研究了许多种称为 ζ 函数的特殊函数。关于 ζ 函数主要有以下四个方面的问题：① 定义 ζ 函数的方法；② ζ 函数的性质；③ ζ 函数在数论中的应用，特别是与某个代数数域中的素理想在有限次扩域中的分解法则的关系；④ 关于各种 ζ 函数之间相互关系的研究。佐藤幹夫对 ζ 函数做出了诸多贡献：他对拉马努金（Ramanujan）猜想与黎曼-韦伊（Riemann-Weil）猜想之间的关系进行了深入研究；关于哈塞（Hasse）ζ 函数，佐藤幹夫得到以代数曲线为基，以椭圆曲线的积为纤维的某些类型的纤维丛；关于哈塞 ζ 函数，佐藤幹夫还提出了如下猜想：设 E 为在有理数域上定义的椭圆曲线，其 Hasse ζ 函数具有如下形式：

$$\zeta(s,E)\sim\zeta(s)\zeta(s-1)\prod_p{}'(1-\pi_p p^{-s})\times(1-\pi_p p^{-s})$$

这里，$|\pi_p|=|\tilde{\pi}_p|=\sqrt{p}$。所以，$\pi_p=\sqrt{p}e^{i\theta_p}$，$\tilde{\pi}_p=\sqrt{p}e^{-i\theta_p}$（$0<\theta_p<\pi$）。佐藤应用电子计算机研究了当 p 在素数集合中变化时，θ_p 的分布，并得出了如下的经验公式：设 $[\alpha,\beta]$ 为属于 $[0,2\pi]$ 的任意区间，假如 E 不具有复数乘法，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\text{小于 }x\text{ 且使 }\theta_p\in[\alpha,\beta]\text{ 的素数 }p\text{ 的个数}}{\text{小于 }x\text{ 的素数个数}}=\frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta\sin^2\theta d\theta$$

这称为佐藤猜想。当 E 具有复数乘法时，对于半数的 p，θ_p 在 $[0, 2\pi]$ 区间中的分布是一致的，而对于剩下的一半 p，θ_p 为 $\frac{\pi}{2}$。关于佐藤猜想，J. T. 塔特、山本芳彦研究过。佐藤斡夫还提出了前齐性空间的概念，并定义了伴随它的 ζ 函数，他的计划由他本人和新谷卓郎所完成。

佐藤斡夫创立微函数理论与 V. 叶戈洛夫(Egorov)发现拟微分算子的标准变换之后，根据 L. V. 赫尔曼德尔(Hörmander)、J. J. 杜斯特曼特(Duistermaat)、河谷隆裕、柏原正树以及佐藤斡夫的工作，确立了余切流形上的局部分析亦即微局部分析的立足点。由于它关系到分析学的本质问题，所以普及之快令人惊讶。理论物理学家虽然是限于特殊场合，但却由物理考察而独立得到了类似微函数的概念。正如由此可以看出的那样，不仅对数学家，而且对物理学家来说，微局部分析现在都是不可缺少的工具。而且在本学科如此迅速的发展中，以佐藤斡夫为核心的数理解析研究所起了并正起着极其巨大的作用，在微局部分析或进而在代数分析学方面，以佐藤斡夫为核心的数理解析研究所成为世界的一个中心。微局部分析这一说法本身，原来就是数理解析研究所中以佐藤斡夫为核心的研究中产生的用语。

佐藤斡夫同他的学生一起，发展了完整量子域理论，以提供支撑二维伊辛(Ising)模型的影响深远的数学体系，并且沿此路线引入了著名的 τ 函数。佐藤斡夫提出在 τ 函数和无穷维格拉斯曼(Grassmann)流形范围内的孤立子方程的一个统一的几何描述，这被他的跟随者推广到其他类方程，包括自共轭杨-米尔斯(Yang-Mills)方程和爱因斯坦(Einstein)方程。

线性(拟)微分方程组的构造定理，亦即在特征流形的一般点中任意微分方程组本质上都可以归结为德拉姆(de Rham)系统，柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)系统，卢伊(Lewy)-溝畑系统这三种方程的组合，这个结果就是以佐藤斡夫为核心在数理解析研究所

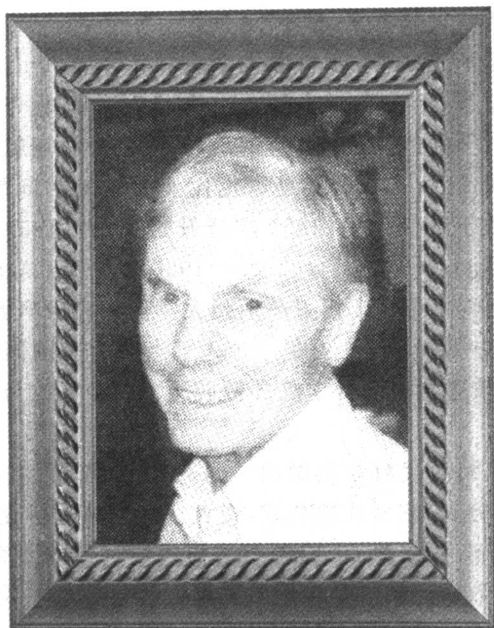
得到的。

佐藤斡夫善于与别人合作，他喜欢慷慨地与年轻数学家分享他的想法，并且在日本创立了一个欣欣向荣的代数分析学学派。他除了荣获沃尔夫数学奖外，还于 1969 年获朝日科学奖，1976 年获日本学士院奖，1984 年获日本文部省颁发的个人文化价值奖，1987 年获富士山奖，1997 年获瑞典皇家科学院颁发的肖克(Schock)奖。

关于佐藤斡夫，大阪大学原校长正田建次郎曾说："在日本，虽然有很多能够解决数学难题的优秀数学家，但没有像佐藤斡夫这样能够在数学的王国里不断开拓创新的数学家。"

佐藤斡夫对数学发表了不少见解，他说："对我来说什么是数学？在我的意识里数学中的分析、几何、代数几乎是没有区分的。……我的数学与其说是古典的，不如说是具体的。也有人说我的数学是逆抽象的。我不认为数学有抽象与具体之分。无论怎样抽象的事物，如果是真正的数学的话，就一定有具体的东西与其相关。有人说数学的各个领域中的主流经常发生变化，但我认为这只是一种表面的流行说法，数学的底流恐怕没有什么变化。"[152]

J. T. 塔特
(Tate, John Torrence)



“J. T. 塔特引入了开创性的方法和观点，由它们引发的许多理论在现在仍然非常活跃。……J. T. 塔特在代数数论领域是个令人崇敬的名字。”

——摘自：Sato and Tate Receive 2002—2003 Wolf Prize. Notices of the American Mathematical Society，2003，50(5)：570

“互反律与上同调理论和代数 K 理论的(某些)联系是有趣的、重要的。”[153]

——J. T. 塔特

J. T. 塔特是美国数学家,1925 年 3 月 13 日生于明尼苏达州明尼阿波利斯。

由于他在代数数论以及算术代数几何做出的杰出贡献,荣获 2003 年的沃尔夫数学奖,时年 78 岁。

J. T. 塔特 1946 年在哈佛大学获得学士学位。1950 年获普林斯顿大学博士学位。其博士论文是在著名数学家 E. 阿廷(Artin)指导下完成的。1950—1954 年担任普林斯顿大学的研究助理和讲师,1953—1954 年是哥伦比亚大学的访问教授,1954—1990 年任教于哈佛大学(1959 年晋升为教授),1959—1961 年度他获得了 Sloan 研究会基金,1965—1966 年获得 Guggnheim 研究会基金。1990 年至今任得克萨斯州大学奥斯汀校区数学系教授。他是 Sid W · Richardso 主席。1969 年当选为美国国家科学院院士,1992 年被选为法国科学院外籍院士,1999 年成为伦敦数学会荣誉会员。

J. T. 塔特对代数数论做出一系列的贡献。代数数论是数论的一个重要分支,它以代数整数,或者代数数域为研究对象。不少整数问题的解决要借助于或者归结为代数整数的研究。因此,代数数论是整数研究的一个自然的发展。代数数论主要起源于对费马猜想的研究。法国著名数学家 P. de 费马 1637 年在丢番图(Diophantus)的《算术》第二卷第八命题的书边写了著名的猜想:方程 $x^n+y^n=z^n(n>z)$ 没有 $xyz\neq0$ 的整数解。对这个猜想的证明可以归结为 $n=4$ 及 n 为奇素数情形的证明。19 世纪中叶,德国数学家 E. E. 库默(Kummer)在试图证明费马猜想过程中引入了"理想数"概念,每个"理想数"可以惟一地分解成素因子的乘积,从而建立了分圆域上的数论。后来另一位德国数学家 J. W. R 戴德金(Dedekind)把 E. E. 库默的工作系统化并推广到一般的代数数域,奠定了代数数论的基础。德国数学家 C. F. 高斯(Gauss)关于二次域的研究是代数数论的另一个重要起源。研究代数数域的算术性质与代数性质之间的联系,是代数数论的一个重要方面。代

数数论的一大特点是，不仅由它可以解决一系列整数规律问题，而且它的成果还可以用到其他许多数学分支。

J. T. 塔特将调和分析的方法应用于研究数论中重要的 L 函数，他通过 A_k 上的傅里叶分析理论的研究，证明 k 的戴德金 ζ 函数或者黑克(Hecke)的具有量特征标的 L 函数的主要性质，即在全复平面上是亚纯函数以及满足函数方程等事实。他还应用代数数域 k 的阿代尔和尹代尔群上的调和分析，给出了量特征标 χ 和 $L_k(S,\chi)$ 的更明确的定义。

J. T. 塔特首先用群的上同调、伽罗瓦上同调论述类域论，为类域论打开新局面。他与他的老师 E. E. 阿廷在有限群的上同调理论的基础上，重新构成了类域论。在他们合写的《类域论》中，提出了类结构的概念，应用群的上同调理论，进一步将类域论公理化和统一化，从而将局部的和整体的、数域的和代数函数域的类域论纳入同一个公理化体系中。J. T. 塔特对在以代数闭域为系数域的单变量代数函数域上的非分歧阿贝尔扩张也有建树，比如他关于无限次伽罗瓦扩张由研究连续上闭链而构成塔特上同调。他关于 R 的贝蒂(Betti) $\dim \mathrm{Tor}_i^R(K,K)$ 有详细的结果。

J. T. 塔特把代数几何方法引入算术，成为算术代数几何的先驱。他把阿贝尔簇上点的高度理论推广到高维情形的复数乘法论。他还确定了 Q 上的可除代数 $U_0(A)$ 的结构，它是用分解 q 幂自同态为素理想来描述的。他还提出了著名的塔特猜想，他的猜想描述了代数簇的丢番图性质与代数几何性质间的关系，这个猜想由德国著名数学家 G. 法尔廷斯(Faltings)于 1983 年证明，G. 法尔廷斯还借助于塔特猜想证明了另一个著名猜想——莫德尔(Mordell)猜想。

J. T. 塔特 20 世纪 70 年代研究的重点是 K 代数理论。他研究了 K 代数理论与伽罗瓦上同调的关系，同时引入“刚性解析空间”这一领域。他关于椭圆曲线及模函数这一与费马猜想有关的著作是经典的。他对至关重要的伯奇-斯温纳顿-戴尔(Birch-

Swinnerton-Dyer)猜想(若 $k=Q$ 及 A 是一维的,则存在常数 $C\neq0$ 使得 $L(s,A)\sim C(s-1)^{q}s\to1$)进行了深入地研究,并把这一猜想推广到任意的 A 和 k。J. T. 塔特还对日本著名数学家佐藤斡夫提出的佐藤猜想进行了研究。在 20 世纪 80 年代,他重点研究了斯塔克尔(Stark)猜想。

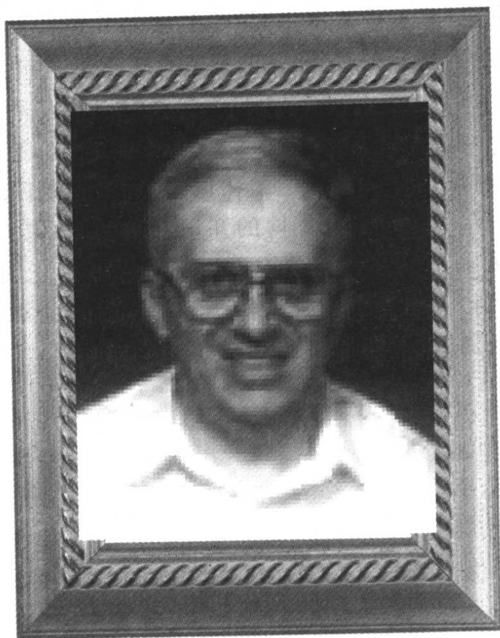
J. T. 塔特 1956 年荣获了科尔(Cole)奖,1995 年荣获了美国数学会斯蒂尔奖的终身成就奖。他是当代数论领域的著名数学家。J. T. 塔特已成为许多奋斗在数论领域的人们的灵感来源。许多概念、理论都有他的参与,在数学中以他的姓氏命名的术语有:塔特代数、有限群的塔特上同调、阿贝尔簇的塔特模、阿贝尔族的自同态的塔特猜想、代数闭链的塔特猜想、塔特椭圆曲线、塔特扭曲、塔特主题、塔特-沙法列维奇(Shafarevich)群、卢宾(Lubin)-塔特群、尼龙(Neron)-塔特高,等等。

J. T. 塔特对希尔伯特第九问题"任意代数数域中一般的互反律"有深入的研究,并发表了一些深刻的见解。他说:"当时 D. 希尔伯特把它当作数论中一个'较特殊'的问题,只讲了短短的一段话,我以为他似乎对这个问题的潜在意义估计不足。……互反律在群同构方面的推广是由霍克斯奇尔德(Hochschild)、中山(Nakayama)和韦伊(Weil)将群的上同调方法引入类域论而开始的。在 E. E. 阿廷的讨论班中,他和我用中山的技巧把上同调方法搞得更漂亮。……互反律与上同调理论和代数 K 理论的(某些)联系是有趣的、重要的。但我觉得阿廷互反律之后最大的题目是以某种方式将它扩充到非阿贝尔扩域上,或者从解析观点说是去确认阿廷的非阿贝尔 L 级数。"[153]

J. T. 塔特虽然是著名的数学家,但他并不骄傲自大,很注意向同行学习,喜欢看到别人的优点。例如他与 D. B. 芒福德(Mumford)共同写的一篇文章中写道:"A. 格罗腾迪克(菲尔兹奖得主)是一个不知疲倦的人,他有一股非凡的冲劲和不可遏止的逻辑力量,在他自己的思想的指导下,他把每个概念都发挥到最广而

没有一点人为的限制——就是说与逻辑推理无关的限制。也许有史以来没有数学家有过他这样的愿望。结果A. 格罗腾迪克写下了代数几何基础的不朽的巨著,完全改变了这一学科的面貌。……P. 德利涅(菲尔兹奖得主)思维的清楚与简捷是惊人的。他的论著中很少有多余的字句,行文没有什么重复,想法简单而清楚地呈现在读者的眼前,但写的是如此之紧凑以致几乎每句话都是必要的。……此人一点也不做作,为人自信而谦虚,有能力并且愿意和任何人讨论任何数学课题。在讨论中,他的提问与意见总是使人获益匪浅。总之,他有渊博的知识,大胆的想像力,强有力的技巧,以及无往不利的洞察关键思想的本能。[154]正因为J. T. 塔特善于看到别人的优点、向别人学习,从而在学术上取得了骄人的成就,并受到别人的崇敬。

G. A. 马尔古利斯
(Margulis, Grigorii Aleksandrovch)



“在我主持 G. A. 马尔古利斯论文讨论班的一年中，我所学到的数学比我以前所有学过的数学都要多。”[161]

——J. L. 蒂茨

“用于解决奥本海姆猜想的不同方法主要有解析数论、李群理论、代数群论、遍历理论、表示论、归纳论、数的几何以及一些其他方法。”[162]

——G. A. 马尔古利斯

G. A. 马尔古利斯是俄国数学家,1946 年 4 月 24 日生于莫斯科。由于他对代数学,特别是对半单李群中的格论及其在遍历理论、表示理论、数论、组合学和测度论方面的杰出贡献,2005 年荣获沃尔夫数学奖,时年 59 岁。他还于 1978 年荣获菲尔兹奖。

G. A. 马尔古利斯于 1962 年考入莫斯科大学数学系,1967 年本科毕业获得学士学位后,又留下来继续深造。G. A. 马尔古利斯在学生期间即已显示出非凡的数学家气质,1968 年,他还荣获了莫斯科数学会颁发的年轻数学家称号。在读书期间,他直接接受过 I. M. 盖尔范德(Gelfand)的指导。1970 年,G. A. 马尔古利斯以一篇《U 系统理论中的某些问题》的论文获得了数理科学副博士学位。毕业后,他被分配到苏联科学院莫斯科信息与通信问题研究所工作。1970—1974 年,当他还是所里最年轻的科研人员时,就已被提拔为骨干研究员。不过至少在 1978 年他获得菲尔兹奖时,他还是个副博士,由此可见苏联博士学位的授予标准何等严格。G. A. 马尔古利斯保持其骨干研究员称号直至 1960 年,而后被提拔为学科带头人。

不无遗憾的是,1978 年,G. A. 马尔古利斯由于种种原因并未获准去赫尔辛基领取菲尔兹奖。这无疑是赫尔辛基会议的一个损失。对于 G. A. 马尔古利斯在国外的众多同行们来说,这也是个"不幸"事件。因为平时他们只能见文不见人,没有机会与在此之前从未出过国的 G. A. 马尔古利斯晤面。大家本想在这次数学家大会上一睹其风采,聆听其精彩报告,最后才知道落了空。正如代替 G. A. 马尔古利斯作大会发言的法国数学家 J. L. 蒂茨所言:"我不能不为马尔古利斯的缺席表示我深深的失望。无疑,这也是在坐诸位所共有的心情。"

不过,G. A. 马尔古利斯很快就获得了出国访问的机会。1979 年他到波恩大学访问 3 个月,并在这里与其亲密的"文友"J. L. 蒂茨见了面,还接受了 J. L. 蒂茨代表国际数学家大会执委会补发给他的菲尔兹奖。

1988—1991 年，G. A. 马尔古利斯先后应邀到马克斯·普朗克研究所、法兰西学院、哈佛大学以及普林斯顿高等研究所等地作访问研究。从 1991 年起他一直担任耶鲁大学客座教授。因为 G. A. 马尔古利斯做出的卓著贡献，除了菲尔兹奖外，他还于 1990 年荣获了法兰西学院勋章，同年受聘为美国艺术与科学研究院荣誉院士，1995 年获得汉堡奖，1996 年被聘为塔塔基础理论研究所荣誉研究员。

为简单介绍 G. A. 马尔古利斯工作的思想，我们首先要谈谈格子群（一类特殊的离散子群）的概念。设 G 为 n 维欧氏空间上的李群，T 为其闭子群（即作为李子群的子流形上的拓扑，与其作为子拓扑空间的拓扑相一致），则记这时的商群（也叫商拓扑空间）为 $M=G/P$。这时 M 上的 G 群作用 $M\times G\to M$ 如果是可微的，则 M 即被称为齐性空间。那么当 $M=G/P$ 是齐性空间，且具有有限不变测度[相当于不变体积，记为 $\mu(M)<+\infty$]时，则将 P 叫做 G 的格子群。

另外，若记 $SL(n,R)$ 为 $n\times n$ 矩阵的全体集合，矩阵元素皆独立取实数值，则显然 $SL(n,R)$ 是一个 n 维欧氏空间上的群，且是李群。同时我们知道，对于所有元素皆取整数的 $n\times n$ 矩阵集，记为 $SL(n,Z)$，Z 表整数，则显然 $SL(n,Z)$ 为 $SL(n,R)$ 的一类离散子群。具体说是一类阿贝尔群（关于“加”运算的群）。特别是当商 $SL(n,R)/SL(n,Z)\triangleq N$ 具有有限不变测度时[记为 $\mu(N)<+\infty$]，则将 N 称做 $SL(n,R)$ 的算术子群。

这时自然有个进一步的问题，即上述格子群与算术子群间有何关系？据说 C. F. 克莱因（Klein）和 J. H. 庞加莱（Poincaré）也早已注意到了二维空间中的这类问题。对此，人们曾先后得到如下结论：“如果子群 $\rho\subseteq G$ 与子群 $SL(n,Z)$ 可公度（即所谓交叉积之差，又叫括号积[$\rho,\rho\cap SL(n,Z)$]或[$SL(n,Z),SL(n,Z)\cap\rho$]有界）时，ρ 是 G 的算术子群”，“对于半单李群 G°[无逆元素，且除了单位元作为正规子群（对 G° 元素左右乘相等的子群）外，没有别的

正规子群的李群],若有算术子群 $\rho \subseteq G^{\circ}$,则必有 $\mu(G^{\circ}/\rho) < +\infty$”,换句话说:“半单李群 G°的算术子群都是其格子群”。这就使问题更进了一步。这就是1960年在印度孟买召开的函数论国际会议上由A. 赛尔贝格(Sellberg)和A. 韦伊(Weil)提出的著名的“赛尔贝格猜想”:除了一些例外,一般的格子群都是算术群。后来在1966年于莫斯科举行的第15届国际数学家大会上,苏联数学家I. 皮亚捷斯基-沙皮罗(Piatetski-Sapiro)又将其进一步明确为“对于大多数半单李群,其格子群都是其算术子群”。这可是很难“啃”得动的问题。正如美国数学家莫斯多夫所说:这个问题就像一堵光滑的岩壁,让人无从着手攀登。G. A. 马尔古利斯正是巧妙而综合地运用了微分几何、代数学、动力系统及遍历理论等多种看起来似乎毫无关系的理论,才最终把问题解决了。有趣的是,据G. A. 马尔古利斯自己说,他之所以想到用遍历理论,还是受到了莫斯多夫的启示。

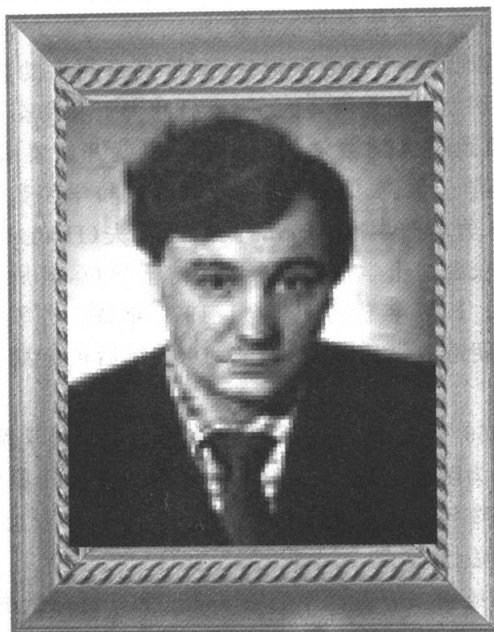
G. A. 马尔古利斯是通过两个阶段来完成这项任务的。首先是在1968年对非紧致情况(直观说即开集情形)做出突破性工作,接着又经过6年的艰辛才终于在1974年完全解决了“赛尔贝格猜想”。他的工作震动了整个数学界,著名数学家、菲尔兹奖得主D. B. 芒福德(Mumford)曾将其誉为“惊心动魄”的工作。法国数学家、沃尔夫奖得主J. L. 蒂茨还立即主持了一个专门阅读G. A. 马尔古利斯论文的讨论班,该讨论班整整持续了一年时间。J. L. 蒂茨曾说过:“在我主持马尔古利斯论文讨论班的一年中,我所学到的数学比我以前所有学过的数学都要多。”早在1968年,当G. A. 马尔古利斯在这一课题上刚刚做出突破时,就有数学家在布尔巴基学派的讨论班上及时给予了介绍。而在其总成果出来以后,很快就波及到了相关的数学领域,得到了越来越多的漂亮成果。由此可见该问题的影响力之大、影响面之广、影响度之深了。

此外,G. A. 马尔古利斯还于1986年完全解决了数的几何学中一个所谓的“奥本海姆猜想”,这是由A. 奥本海姆(Oppenheim)于

1929 年提出来的“关于在整点上的无理系数二次型的不确定值问题。”1940 年初，H. 达文波特(Davenport)和海布隆(Helbronn)证明了该猜想的一些特殊情形为真；1946 年沃森(Watson)扩展了这一成果，证明了更进一步的一些特殊情形为真。最后 G. A. 马尔古利斯以其漂亮的技巧，彻底解决了这一问题，他综合运用了解析数论李群和代数群论、表示论、遍历理论、归纳论和数论等不同的方法，再一次显示出他善于利用不同方向甚至是不同领域的工具，以集中解决一个艰深难题的“高超功力”。这可不是一般人想用就用得来的，非得有天才加修养不可。而 G. A. 马尔古利斯，则正是两者兼备的天才数学家。

G. A. 马尔古利斯曾应邀在 1990 年国际数学家大会上以《齐性空间上子群作用的动态性质与遍历性质及对数论的应用》为题作了 1 小时的大会报告，他在报告中简要地论述了齐性空间上子群作用的轨道行为的一些其他结果和猜想，以及这些结果、猜想与数论的联系。他还提出了关于一般流形和测度空间上半单群和离散子群的一些新近的结果。他的精彩报告受到热烈欢迎。

S. P. 诺维科夫
(Novikov, Sergei Petrovich)



“S. P. 诺维科夫是拓扑学领域诸多杰出成果的创造者。……他与物理学家们的紧密接触,促使他探讨如何将当代几何与拓扑学转化为理论物理学家们能够接受的形式。”[161]

——M. 莫纳斯特尔斯基

“我数学生涯是从代数拓扑开始的,而且在这个领域里我持续工作了十多年。实际上,我现在仍然首先把自己看做一个代数拓扑学家。”[163]

——S. P. 诺维科夫

S. P. 诺维科夫是俄国数学家,1938 年 3 月 20 日生于高尔基城(今俄罗斯罗夫哥诺德市)。由于他对代数拓扑学、微分拓扑学以及数学物理领域的杰出贡献,2005 年荣获沃尔夫数学奖,时年 67 岁。他 1970 年还荣获菲尔兹奖。

S. P. 诺维科夫出身数学世家,父母都是杰出的数学家,这使他从小就受到家庭的熏陶,加上他自身的天资和勤奋,17 岁(1955 年)便考入莫斯科大学数学力学系,21 岁就开始发表论文,并于 1960 年获得学士学位。随后他又考取苏联科学院数学研究所的研究生,师从著名数学家 M. M. 波斯尼科夫(Постников)。1964 年诺维科夫获副博士学位,1965 年获博士学位,其后回到莫斯科大学任教授。1967 年获列宁奖金。1971 年调任苏联科学院理论物理研究所朗道数学研究室主任。1992 年后他定期去美国马里兰大学任教。

早在 1966 年,S. P. 诺维科夫就当选为苏联科学院通讯院士,1981 年当选为院士。1985—1996 年他还一直担任莫斯科数学会理事长。1993 年当选为欧洲科学院院士,1994 年当选为美国国家科学院外籍院士。

S. P. 诺维科夫有着深厚的数学功底和广泛活跃的研究兴趣,而且其贡献也是多方面的,大体上可归为拓扑学和动力系统两大领域,现简介如下。

一、拓扑学方面的工作

按 S. P. 诺维科夫自己的说法,他是以一个拓扑学家的身份开始数学研究的。他在拓扑学上的一系列贡献,分属若干个学科分支,但不管哪一个分支,其共同特征即在于对各种映射“类”的研究,具体可表述为等价类的研究和不变性的研究。

1. 等价类的研究

这方面涉及的学科主要有同调论、同伦论和配边理论等。简单地说同调论属代数拓扑学,产生自 n 维空间多面体中所谓单纯形、复形(单纯形的复合,记为 K)及其顶点间的各种关系。而同

伦论则是一个采用所谓的“同伦”方法来获得或判定出拓扑类后，进而探索其性质和应用的学科。

配边理论是由1958年菲尔兹奖得主R. 托姆(Thom)创立的一种理论，属于微分拓扑学范围，是指采用“配边”方式来获得或判定拓扑类，并探索其性质和应用的学科领域。

表面看来同调论、同伦论和配边理论分别属于不同的拓扑学分支，但是整个拓扑学的“等价类”特征却把它们联系了起来。S.P. 诺维科夫首先用同伦论来解决配边理论问题，反过来又用配边理论解决同伦论问题。他把配边理论变成广义上同调理论，并仿照上同调理论来研究其各种性质，得到了许多有趣的结果。他的工作有力地推动了同伦论的发展，同时也使配边理论成为现代拓扑学的重要工具之一。

2. 不变性的探讨

本质上说，“等价类”也是“不变性”的一种描述，因此它最终探索的还是拓扑不变性。这方面最为典型和最为重要的问题首先是所谓“示性类理论”的研究，其次是所谓“指标理论”的研究。

示性类理论是为了回答“微分流形 M 上的任一点 $x(\in M)$ 处是否都存在 k 个线性独立的切向量场”，也就是说，对于 M 的切丛 $\Omega=$(底空间、全空间、投影映射)$\triangleq(M,B,\pi^{-1})$，考察 Ω 上可否存在 k 个截痕，它们彼此是线性相关的。20世纪中叶对此“示性类”问题先后产生过不少重要的成果，其中著名的有施蒂弗尔-惠特尼类、陈(省身)类、吴(文俊)类和庞特里亚金示性类等等。在一般意义下前三者都被证明是微分流形 M 的不变量，唯有庞特里亚金示性类被J. W. 米尔诺(Milnor)证明并不是 M 的拓扑不变量，那么可不可以在一定条件下使庞特里亚金示性类成为不变量呢？这就成为一个更具挑战性的问题了。S.P. 诺维科夫的菲尔兹奖获奖工作，正是体现在对这一问题的解决上。

不过，S.P. 诺维科夫解决此问题的初衷并非直接从这一问题出发。具体说，S.P. 诺维科夫于1965年提出一个猜想：在基本群

产生的流形上，庞特里亚金示性类的某类多项式具有同伦不变性。这就是著名的诺维科夫猜想。它是拓扑学中最为基础的问题之一，目的是想在简单情形探索一下高维流形的分类问题，也就是后来的布罗德-诺维科夫-沃尔理论。但正是在围绕这一猜想进行的工作中，S. P. 诺维科夫同时证明了组合流形上有理庞特里亚金示性类是拓扑不变量，从而荣获了 1970 年的菲尔兹奖。

二、数理科学与动力系统方面的工作

现代有不少数学名家，不管他们的主体工作多么纯粹(纯粹数学)，他们总是不会忘记应用，一方面是其抽象的数学成果对于其他学科领域的应用，另一方面则是直接关心或从事应用数学的研究。

S. P. 诺维科夫正是这样的一位数学名家。除了在他的主体研究领域——拓扑学上有着丰富的贡献外，他在应用数学领域还有如下多方面的建树。

(1) 关于齐性宇宙学模型的动力系统分析。S. P. 诺维科夫与他的一位学生一起提出了一个高妙的技巧，从而解析地刻画出一类奇异吸引子——一类十分奇怪的几何现象。

(2) 可积系统的研究与应用。S. P. 诺维科夫继承并发展了经典数学中对微分方程求解，亦即寻求可积性的研究，从而获得了高强的处理系列实际模型的能力。比如他发现不仅在经典力学、量子力学和统计力学中广泛存在可积模型，而且在量子场论、超弦理论和孤子理论等领域中，可积模型都广泛存在，从而为应用数学做出了重要贡献。

(3) 关于孤子理论的研究。这是 S. P. 诺维科夫在 20 世纪 70 年代以来最为关心的方向之一，并由此引申到可积系统、共形场理论及量子群理论的研究。

S. P. 诺维科夫通过与物理学家们紧密合作，在紧接着规范场理论的研究之后，又在多值泛函理论方面取得了开创性成果。近年来，S. P. 诺维科夫将物理的直观与深刻的拓扑技巧相结合，与

他的学生们一道，在弦论中又取得了许多重要结果。

S. P. 诺维科夫对数学的有关问题发表过不少精辟见解，他曾说过："在莫斯科我们有一个人数众多而且极富活力的数学学派，其领导者是 A. N. 柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)，我认为他是继 J. H. 庞加莱(Poincaré)、D. 希尔伯特(Hilbert)及 C. H. H. 外尔(Weyl)之后最大的数学家。许多著名的数学家都是他早期的学生，如 I. M. 盖尔范德(Gelfand)、V. I. 阿诺尔德(Arnold)及许多其他的数学家。"[163] 他还说："在数学界，我与其他数学家有着密切的联系，我向朋友们请教，如向 V. I. 阿诺尔德和阿诺科夫(Anocov)请教，结果我被卷到了 S. 斯梅尔(Smale)的动力系统中的问题有关的叶状结构理论中去了。其他来自盖尔范德学派的朋友，通过教给我偏微分方程的知识，帮助我涉足到了指标问题——我在这个领域写了一些文章——当然我的朋友从我这里也学到了一些拓扑学知识。我从搞代数几何的朋友那里也受益匪浅，他们帮助我在拓扑学中应用一些代数概念。"[163]

为什么 S. P. 诺维科夫能"将当代几何与拓扑学转化为理论物理学家们能够接受的形式"呢？他说："我花了至少 5 年的时间(1965—1970)来专门学习物理学，有时，我花掉工作时间的一半，作为一个真正的学生，全副精力地学习，从……爱因斯坦和其他一些物理学家所写的入门书学起。"[163]

S. P. 诺维科夫还指出："动力系统理论是一门崭新的极为优美的学科。……研究爱因斯坦方程的齐次解空间，能够引导出复杂的动力系统，特别是在宇宙学奇点附近。……在描述广义相对论的动力系统的相对论空间里有着特别有趣的几何。"[163] 他还指出："孤子理论是一个非常有趣的发现，它引导出了现代可积系统、共形场理论及量子群理论。"[163] 他说："数学和物理学中的数学方法的大部分最重要的发现是在可积模型理论的发展过程中得到的。"[163] 他的这些言行，对于搞应用数学研究的人，必定会有深刻的启发。

编 后 感

大目虽然已经写完，但不想就此停笔。因为心里总是觉得还有些话想说。啊！这些大师的事迹不就是20世纪以来，全球数学的43份极大样本吗？它们不正饱含着全球数学的众多信息吗？的确，他们虽然风格各异，学派不同，却有着许多共通之处，正是这些展示出全球数学的规律，预示着全球数学的未来。相信从中还可以开发出更多的信息，无奈作者力不从心，更多地只能寄厚望于读者，这里仅就几条直观的信息启录于下：

一、这43位沃尔夫数学奖的获奖年龄平均超过67岁，基本上可以概括他们的主要成就，有的人得奖时已退休。其中，获奖年龄最大的是C.L. 西格尔和O. 扎里斯基，他们当时已82岁；年龄最小的是A. 怀尔斯，他当时43岁。这些数学大师，不仅在某个数学分支上有极深的造诣和卓越的贡献，而且都博学多能，涉足多个分支，同时在几个分支上都有建树。他们不但自己成果卓著，而且其中大多数人都培养了一代或几代杰出人才，形成了自己的著名学派。他们是当代不同凡响的数学家。这43位沃尔夫数学奖得主中，有9人早在年轻时期就崭露头角，蜚声数坛，荣获了由国际数学联合会主持评定的菲尔兹奖，他们是：L.V. 阿尔福斯、A. 赛尔伯格、小平邦彦、L.V. 赫尔曼德尔、J.W. 米尔诺、J.G. 汤普森、J.P. 塞尔、G.A. 马尔古利斯、S.P. 诺维科夫。而A. 怀尔斯却是先获沃尔夫奖，后获菲尔兹特别贡献奖。

二、这些数学大师之所以能在数学上取得如此辉煌的成就，其主要原因是：他们都非常勤奋刻苦，对数学进行执著的追求；他们有强烈的事业心并为探索数学世界中的奥秘锲而不舍、坚忍不拔；他们用全部精力求解悬而未决的数学难题，去开创数学的新局面；

他们善于从面临的诸多数学问题中选择出值得探索的问题，从而在数学史册上增添了新的光辉篇章；他们治学严谨，有许多值得我们学习的优秀品格和治学方法。

这些大师对数学，或对数学的某些分支，或对纯粹数学与应用数学，或对数学研究、数学教育，发表了各自的见解。这些见解，是他们在数学这块园地辛勤耕耘几十年亲身感受和实践的总结。他们站在历史和时代的高度，高瞻远瞩，鸟瞰数学，发表了许多非常深刻而又精辟的真知灼见，有的堪称至理名言，很值得我们去思索、去联想、去研究、去实践。当然，他们的有些意见也是值得商榷的，还有些是有争议的。我相信读者会正确地分析对待它们，并从中得到启发或借鉴。

三、这 43 位沃尔夫数学奖得主中，美国籍数学家有 15 人，他们是 L. V. 阿尔福斯(芬兰裔，美国籍)、O. 扎里斯基(俄裔，美国籍)、H. 惠特尼、陈省身(华裔，美国籍)、H. 烈伟(德裔，美国籍)、S. 艾伦伯格(波兰裔，美国籍)、A. 赛尔伯格(挪威裔，美国籍)、P. D. 拉克斯(匈牙利裔，美国籍)、J. W. 米尔诺、A. P. 考尔德伦(阿根廷裔，美国籍)、J. G. 汤普森、J. B. 凯勒、E. M. 斯坦(比利时裔，美国籍)、R. 博特(匈牙利裔，美国籍)、J. T. 塔特。其中出生于美国的只有 H. 惠特尼、J. W. 米尔诺、J. G. 汤普森、J. B. 凯勒、J. T. 塔特 5 人。苏联和俄国籍数学家有 8 人，他们是 I. M. 盖尔范德、A. N. 柯尔莫哥洛夫、M. G. 克列因、M. 格罗莫夫、Y. 赛奈、V. I. 阿诺尔德、G. A. 马尔古利斯、S. P. 诺维科夫。另外，O. 扎里斯基和 I. 皮亚捷斯基一沙皮罗也出生于俄国和苏联。法国籍数学家有 5 人，他们是 J. 勒雷、A. 韦伊、H. 嘉当、J. L. 蒂茨(比利时裔，法国籍)、J. P. 塞尔。德国籍数学家有 3 人，他们是 C. L. 西格尔、F. E. P. 希策布鲁赫、J. K. 莫泽。日本籍数学家有 3 人，他们是小平邦彦、伊藤清、佐藤幹夫。匈牙利籍数学家 2 人，P. 爱尔特希、L. 洛瓦兹(P. D. 拉克斯也出生于匈牙利)。瑞典籍数学家 2 人，L. V. 赫尔曼德尔、L. 卡尔森。意大利数学家 1 人，

E. 德乔吉。英国数学家 1 人，A. 怀尔斯。加拿大数学家 1 人，R. 朗兰兹。以色列数学家 2 人，I. 皮亚捷斯基-沙皮罗、S. 谢拉赫。从这个分布可以看出，当今美国的数学水平居于世界前列，它重视科学和人才，吸引了世界许多有才华的数学家到那里参加研究工作或任教；苏联的数学水平也是很高的，它重视基础理论教育和研究，培养、造就了不少杰出的数学家。法国、德国、英国的数学教育和数学研究有很好的基础和优良的传统，仍保持着很高的水平。日本的数学近半个世纪以来取得了长足的进展，令人瞩目。从这个分布可以看出，一个国家的数学水平和它的科学技术水平、教育和经济发展有着极为密切的关系。

四、得奖的领域包括拓扑学、数论、微分方程、复变函数、泛函分析、调和分析、代数、代数几何、微分几何、概率论与数理统计、组合论、动力系统、数理逻辑、应用数学等主要分支，这表明半个世纪以来，在这些领域出现了重大突破；新概念、新理论、新方法层出不穷，令人眼花缭乱、目不暇接，特别是代数拓扑、微分拓扑、代数几何、抽象代数、应用数学等领域取得了巨大的进展，成果最为丰硕，而且它们极大地推动和影响了其他分支的发展。因此，德国著名数学家 C. H. H. 外尔指出："今天，拓扑的天使、抽象代数的精灵为每一个数学领域的灵魂而斗争。"法国著名数学家 J. A. 迪厄多内称誉："代数拓扑学和微分拓扑学通过他们对于所有其他数学分支的影响，才真正应该名副其实地称为 20 世纪数学的女王。"的确，拓扑学是 20 世纪最丰富多彩的一个数学分支。

五、这些数学大师的成就展现出：

数学已经朝着各个方向以非常惊人的速度扩展，新的领域出现了，向其他领域的扩散加速了，从而使我们关于经典领域的知识变得更加深厚了。而且可以看出，数学的发展，并不仅仅是一些新概念、新理论、新方法的简单积累，它包含着数学本身许多根本的变革，可以说是质的飞跃。但是这些质的变化不是通过破坏和推翻原有成果来实现，而是通过深化和推广原有成果而形成，进而达

到新的境界、新的高度。当代数学的最大荣耀就是:数学的成就正在被当今的研究者们以极大的幅度丰富和扩展着,从而使这门最古老的科学充满了勃勃生机,成为所有科学中最富有青春和富有生命力的学科之一。正如著名数学家 C.J. 凯泽(Keyser)所指出的:"数学的黄金时代不是欧几里得时代,而是我们的时代。"当代数学是人类思想所创造的最博大精深的知识领域,今天已经不大可能有哪一位数学家能够全面纵观数学领地的各种景色了,数学家正在一天比一天更难于对数学所有分支的进步保持着哪怕是一般性的了解。

现代数学的发生、发展,一方面是不断地分化出新的分支,另一方面是不断地把各分支进行综合和渗透。在不同分支之间往往有着不断增长的相互关系,一个分支所取得的成果,往往可以直接或间接地用到其他好多分支上去,并取得突破性的进展。例如,拓扑学的成果广泛地和分析、代数等其他分支相结合,形成了当今数学最为活跃的领域之一。数学所表现出的这种高度分化又高度综合的趋势与数学各分支的互相渗透、相互促进的机能是导致现代数学整体向前发展的强大动力之一,也是当代数学的特色之一。当今,我们可以看出:数学世界中的很大一部分内容以一种完全意想不到的方式联系在一起。例如,代数在数学中名副其实地到处渗透。因此,H. 嘉当说:"对数学的所有重要分支进行综合研究,看来时机已经成熟;这种研究应该……使各科目之间的基本联系得以理解。"伊藤清指出:"数学各分支之间的相互联系越来越密切,作为有机整体的数学正在形成。"L. 洛瓦兹还强调:"我们这门科学有其高度的完整性,正是这种完整性,使其具有强大的力量和经久不衰的活力。"

数学研究的对象并不局限于"数"和"形",它还研究现实世界的任何形式与关系。不但如此,它还研究在逻辑上可能的形式与关系,从而使数学的抽象程度越来越高。当今数学的一个令人惊异的特征是它对抽象方法的力量的承认,从而引出了大量的新结

果、新课题。而且我们可以看出，数学中大多数抽象推广来自于描写和解释人和环境的想法。这种抽象和推广不仅其本身有趣，而且常常被证实是能容纳具体的解释与应用的。当代数学之所以能够以令人吃惊的程度深入到科学和技术中去，其原因之一就在于数学的思想是纯粹抽象的。就其本质而言，数学是抽象的，而且它的抽象比逻辑的抽象更高一层。然而，数学越是远离现实（即走向抽象），它就越靠近现实。因为不管它显得多么抽象，归根到底它还是直接或间接地从某些现实范围中吸取出来的具有一定本质特征的具体形式。

数学的应用越来越广，它不声不响地向其他学科纵深渗透。当今，不但在物理和工程中大量应用数学，而且在工业规划、经济学、医学、生物化学、生物物理，以至在哲学和语言学等问题中都需要应用数学。当今应用数学之广，可以借用著名科学家 A. 爱因斯坦(Einstein)的话来描述："它的领土相应地定义为那些能被数学术语表达的知识的总和。"

六、43 位沃尔夫数学奖得主中，有多人曾在美国普林斯顿高等研究所从事过数学研究，他们是：C. L. 西格尔、A. 韦伊、H. 惠特尼、陈省身、小平邦彦、A. 赛尔伯格、F. E. P. 希策布鲁赫、L. V. 赫尔曼德尔、J. W. 米尔诺、A. P. 考尔德伦、J. L. 蒂茨、R. 朗兰兹、A. 怀尔斯、Y. 赛奈、E. M. 斯坦、R. 博特、G. A. 马尔古利斯等。这说明普林斯顿高等研究所的确存在着一种令人振奋的学术研究气氛，是当今数学精英成长、荟萃之地。它的经验很值得借鉴。

七、43 位沃尔夫数学奖获得主中，有多人曾应邀前来我国进行学术访问或讲学，他们是：陈省身、A. 韦伊、H. 嘉当、P. 爱尔特希、H. 烈伟、A. 赛尔伯格、伊藤清、P. D. 拉克斯、L. V. 赫尔曼德尔、F. E. P. 希策布鲁赫、L. 卡尔森、J. L. 蒂茨、J. B. 凯勒、V. I. 阿诺尔德，A. 怀尔斯等。这说明随着我国的改革开放，我国的数学界已大大加强了与国外数学家的联系。此外，我国还翻译出版

了多位获奖者的代表作或由他们主编的教材。特别是近二十多年来,我国有不少数学家到国外参加国际数学家大会,参加工业与应用数学国际会议和国际数学教育大会以及其他一些重大的学术会议,到国外进行学术访问,并且我国还选送了许多青年到国外去留学深造,并有多位中青年数学家应邀在国际数学家大会上作 45 分钟的专题报告。特别是国际数学家大会于 2002 年在我国首都北京举行,这些无疑将极大促进和加速我国数学的发展。我们伟大的中华民族是勤劳、智慧的民族,在世界数学史上曾经有过值得自豪的过去,可以相信,只要我们看到差距,虚心学习,急起直追,不屈不挠,我国的数学水平必定会进入世界的前列,必定会有更多炎黄子孙蜚声世界数坛。

附录一　菲尔兹奖及其得主简介

菲尔兹奖是以已故加拿大数学家、教育家 J.C. 菲尔兹(Fields, John Charles, 1863—1932)的姓氏命名的。

J.C. 菲尔兹 1863 年 5 月 14 日生于加拿大的安大略省哈密尔顿。他 11 岁丧父,18 岁丧母,家境不算太好。他 17 岁进入多伦多大学数学系学习,1884 年获学士学位,1887 年获美国约翰·霍普金斯大学的博士学位,其后在该校任教到 1889 年,继而在宾夕法尼亚州的阿勒格尼大学任教到 1892 年。之后,他远赴欧洲,游学巴黎、柏林等地整整 10 年,与米塔-列夫勒(Mittag-Leffler)等著名数学家有密切的交往,这一段经历"对于他的生活和观点,产生了决定性的影响。"1902 年回国任教于多伦多大学,直到三十年后去世。

J.C. 菲尔兹在代数学方面颇有建树。例如他证明了黎曼-罗赫定理等。自 1907 年起先后当选为加拿大皇家学会会员、英国皇家学会会员和苏联科学院等许多科学团体的成员。H.S. 特罗普(Tropp)说:"J.C. 菲尔兹是这么一个人,他一丝不苟、有条理,有一种坚韧性,一旦他开始追求某一目标,他就继续下去,直到此目标被达到……他对他的国家和他的大学有强烈的自豪感和依恋。"



J.C. 菲尔兹主张数学发展应是国际性的,他对于数学的国际交流的重要性,对于促进北美洲数学的发展都抱有独特的见解并满腔热情地做出了很大的贡献。为了使北美洲数学迅速发展并赶上

欧洲，是他第一个在加拿大推进研究生教育，也是他全力筹备并主持了 1924 年在多伦多召开的国际数学家大会(这是在欧洲之外召开的第一次国际数学家大会)。这次大会使他过分劳累，从此健康状况再也没有好转，但这次大会对于促进北美的数学发展和数学家之间的国际交流，确实产生了深远的影响。当他得知这次大会的经费有结余时，他就萌发了把它作为基金设立一个国际数学奖的念头，为此积极奔走于欧美各国谋求广泛支持，并打算于 1932 年 9 月在苏黎世召开的第九次国际数学家大会上亲自提出建议。但不幸的是他因脑溢血去世。J. C. 菲尔兹在逝世前立下了遗嘱，他把自己留下的遗产加到上述剩余经费中，由多伦多大学的 J. L. 辛治(Synge)* 转交给第九届国际数学家大会，作为设立一个国际数学奖的基金，大会接受了这一建议。J. C. 菲尔兹原本要求此奖“应是纯国际性的，而不是以任何方式与任何国家、机构或个人的名字相联系。”但参加会议的数学家们为了赞许、缅怀 J. C. 菲尔兹的远见卓识、组织才干和无私奉献的品格，决定将该奖命名为菲尔兹奖。



正面



反面

菲尔兹奖的一个重大特点是奖励年轻人，只授予年龄不越过 40 岁的数学家(这一点在刚开始似乎只是个不成文的规定，1974 年在温哥华的大会上则做出了明文规定)，“作为对其已有工作的认可”和“鼓励得奖人进一步取得成就并激励其他人重新致力于斯。”

菲尔兹奖包括一枚金质奖章和 1 500 美元的奖金。奖章(见右图)的

---

* 在筹办 1924 年国际数学时，多伦多大学于 1923 年建立了国际大会的一个委员会，J. C. 菲尔兹任主席、J. L. 辛治任秘书。

正面是脸向右的阿基米德(Archimedes)的浮雕头像*,头像的周围镌刻的文字为 TRANSIRE SVVM PECTVS MUNDOQVE POTIRE(超越人类极限做宇宙的主人);奖章的反面镌刻的文字为 CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBVSRE(全世界的数学家们为知识做出新的贡献而自豪),背景中是一个球内接于圆柱的几何图形(因为阿基米德证明了该球的体积和表面积是该圆柱的体积和表面积的 2/3)。就奖金数目来说与诺贝尔奖金相比可以说是微不足道,但为什么在人们的心目中,它的地位竟如此崇高呢?主要原因有三:第一,它是由数学界的国际学术团体——国际数学联合会执委会聘任的权威数学家组成的评委会,从全世界的第一流青年数学家中评定、遴选出来的;第二,它于 1936 年首次在国际数学家大会上颁发后,自 1950 年起都是在每隔四年才召开一次的国际数学家大会上隆重颁发的,且每次获奖者仅 2~4 名;第三,也是最根本的一条是由于得奖人的出色才干和重要成就,赢得了国际社会的声誉。正如本世纪著名数学家 C. H. H. 外尔(Weyl),对 1954 年两位获奖者的评价:他们"所达到的高度是自己未曾想到的","自己从未见过这样的明星在数学天空中灿烂升起","数学界为你们二位所做的工作感到骄傲"。从而证明了菲尔兹奖对青年数学家来说,是世界上最高的国际数学奖。

菲尔兹奖的授奖仪式,都在每次国际数学家大会开幕式上隆重举行,先由执委会主席宣布获奖名单,全场掌声雷动。接着由东道国的重要人物(如国家元首、政府首脑、科学院院长等)或评委会主席或众望所归的著名数学家授予奖章和奖金。最后由一些权威

* 这个头像是加拿大的著名雕刻家麦肯齐(Mckenzie)博士从史密斯(Smith)教授的 30 余幅体现许多艺术家的思想的阿基米德的图片发展而来。该头像展现了一个智者,他具有成熟的年龄、精力旺盛、卷曲的头发和胡子、希腊式的笔直的鼻子和卓越的表情。

数学家分别、逐一简要评介得奖人的主要数学成就(在1936年、1950年和1954年的国际数学家大会上,都只由一位著名数学家来介绍该年获奖者的成就;自1958年开始,改成每位获奖者分别由一位相关领域的著名专家来评介,其内容主要是获奖者的研究成果,很少涉及其生平、简历)。

从1936年开始到2002年,获菲尔兹奖的已有45人(其中一人获得特别贡献奖),他们都是数学天空中升起的灿烂明星,是数学界的精英。

下面逐一对他们作介绍:



姓名:L. V. 阿尔福斯(Ahlfors, Lars Valerian)。

出生日期(获奖时年龄):1907年4月18日(29岁)。

籍贯:芬兰(美籍)。

获奖年度、地点:1936年于奥斯陆。

获奖前后的工作地点:赫尔辛基大学,哈佛大学。

主要成就:证明了当儒瓦猜想;发展覆盖面理论;对黎曼面作了深入研究。



姓名:J. 道格拉斯(Douglas, Jesse)。

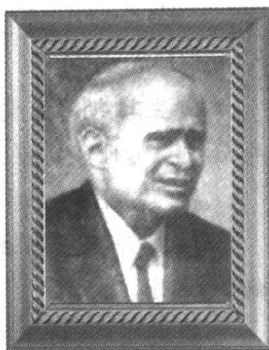
出生日期(获奖时年龄):1897年7月3日(39岁)。

籍贯:美国。

获奖年度、地点:1936年于奥斯陆。

获奖前后的工作地点:麻省理工学院。

主要成就:解决普拉托极小曲面问题,即一种非线性椭圆型偏微分方程的第一边值问题;变分问题的逆问题。



姓名：L. 施瓦尔茨(Schwartz, Laurent)。

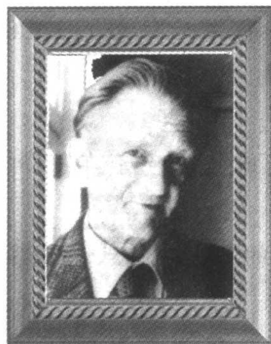
出生日期(获奖时年龄)：1915年9月15日(35岁)。

籍贯：法国。

获奖年度、地点：1950年于坎布里奇。

获奖前后的工作地点：南锡大学，巴黎理学院。

主要成就：创立了广义函数论；在泛函分析、概率论、偏微分方面均有建树。



姓名：A. 赛尔伯格(Selberg, Atle)。

出生日期(获奖时年龄)：1917年6月14日(33岁)。

籍贯：挪威(美籍)。

获奖年度、地点：1950年于坎布里奇。

获奖前后的工作地点：奥斯陆大学，普林斯顿高等研究所。

主要成就：数论中素数定理的初等证明和对黎曼假设的贡献；弱对称黎曼空间中的调和分析和不连续群及其对于狄里克雷级数的应用；连续群的离子群研究。



姓名：小平邦彦（Kodaira Kunihiko）。

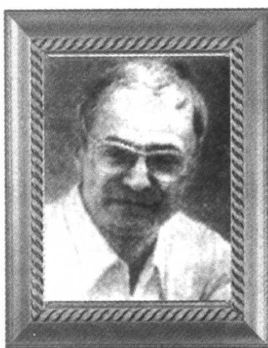
出生日期（获奖时年龄）：1915年3月16日（39岁）。

籍贯：日本。

获奖年度、地点：1954年于阿姆斯特丹。

获奖前后的工作地点：普林斯顿高等研究所。

主要成就：推广了代数几何的一条中心定理——黎曼-罗赫定理；证明了狭义卡勒流形是代数流形，得到了小平邦彦消灭定理。



姓名：J.P.塞尔（Serre，Jean-Pierre）。

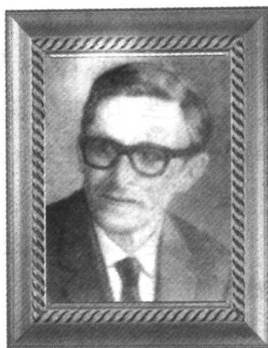
出生日期（获奖时年龄）：1926年9月15日（28岁）。

籍贯：法国。

获奖年度、地点：1954年于阿姆斯特丹。

获奖前后的工作地点：巴黎大学。

主要成就：发展了纤维丛的概念，得出一般纤维空间概念；解决了纤维、底空间、全空间的同调关系问题，并由此证明了同伦论中最重要的一般结果：除了以前知道的两种情形之外，球面的同伦群都是有限群；引进了局部化方法把求同伦群的问题加以分解，得出一系列重要结果。



姓名:K. F. 罗斯(Roth,Klaus Friedrich)。

出生日期(获奖时年龄):1925年10月29日(33岁)。

籍贯:德国(英籍)。

获奖年度、地点:1958年于爱丁堡。

获奖前后的工作地点:伦敦大学。

主要成就:建立了代数数有理逼近的瑟厄-西格尔-罗斯定理。



姓名:R. 托姆(Thom,Rene)。

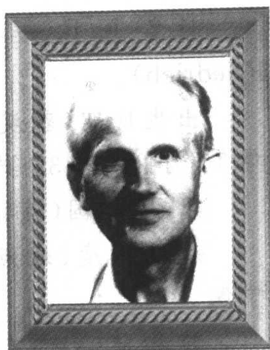
出生日期(获奖时年龄):1923年9月2日(35岁)。

籍贯:法国。

获奖年度、地点:1958年于爱丁堡。

获奖前后的工作地点:斯特拉斯堡大学。

主要成就:创立拓扑学配边理论、奇点理论、突变理论;提出了"托姆复形"、建立了微分流形的大范围理论中的基本定理。



姓名：L. V. 赫尔曼德尔(Hörmander, Lars Valter)。

出生日期(获奖时年龄)：1931年1月24日(31岁)。

籍贯：瑞典。

获奖年度、地点：1962年于斯德哥尔摩。

获奖前后的工作地点：斯德哥尔摩大学。

主要成就：常系数线性偏微分算子理论；变系数线性偏微分方程解的存在性；伪微分算子理论。



姓名：J. W. 米尔诺(Milnor, John Willard)。

出生日期(获奖时年龄)：1931年2月20日(31岁)。

籍贯：美国。

获奖年度、地点：1962年于斯德哥尔摩。

获奖前后的工作地点：普林斯顿大学。

主要成就：微分拓扑中七维球面上存在不同微分结构的证明；对庞加莱主猜想有重要建树；发展复配边、自旋配边理论；代数 K 理论和复超曲面的奇点；对代数、代数数论做出了贡献。



姓名:M. F. 阿蒂亚(Atiyah, Michael Francis)。

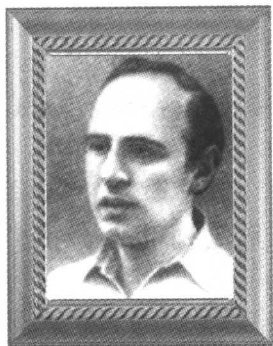
出生日期(获奖时年龄):1929年4月22日(37岁)。

籍贯:英国。

获奖年度、地点:1966年于莫斯科。

获奖前后的工作地点:牛津大学。

主要成就:给出了阿蒂亚-辛格指标定理;为K理论的发展做出了重要贡献;解决了李群表示论、与规范场有关的代数几何中的若干问题,把不动点原理推广到一般形式。



姓名:P. J. 科恩(Cohen, Paul Joseph)。

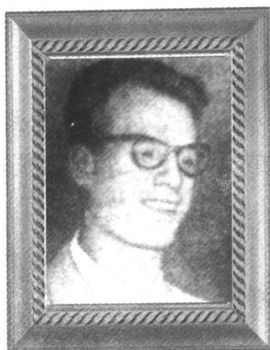
出生日期(获奖时年龄):1934年4月2日(32岁)。

籍贯:美国。

获奖年度、地点:1966年于莫斯科。

获奖前后的工作地点:斯坦福大学。

主要成就:证明了连续统假设与ZF集合公理系统彼此独立,从而使连续统假设成为一种既不能证明,又不能推翻的现代逻辑工具;在抽象调和分析方面颇有建树。



姓名：A. 格罗腾迪克(Grothendieck，Alexandre)。

出生日期(获奖时年龄)：1928年3月28日(38岁)。

籍贯：法国。

获奖年度、地点：1966年于莫斯科。

获奖前后的工作地点：巴黎高等科学研究所。

主要成就：创立了一整套现代代数几何学抽象理论体系；在泛函分析中引入核空间、张量积；对同调代数也有贡献。



姓名：S. 斯梅尔(Smale，Stephen)。

出生日期(获奖时年龄)：1930年7月15日(36岁)。

籍贯：美国。

获奖年度、地点：1966年于莫斯科。

获奖前后的工作地点：加州大学伯克利分校。

主要成就：对微分拓扑学中广义庞加莱猜想有重要建树，证明了四维以的庞加莱猜想；创立现代抽象微分动力系统理论；在数理经济学和运筹学等方面也有重要贡献。



姓名:A. 贝克(Baker,Alan)。

出生日期(获奖时年龄):1939年8月19日(31岁)。

籍贯:英国。

获奖年度、地点:1970年于尼斯。

获奖前后的工作地点:剑桥大学。

主要成就:解决了数论中十几个历史悠久的困难问题,范围涉及超越数论、不定方程和代数数论等方面;在二次数域方面,他解决了高斯时代留下来的一个老问题,肯定了类数为1的虚二次数域只有9个。



姓名:广中平祐(Hironaka Heisuke)。

出生日期(获奖时年龄):1931年4月9日(39岁)。

籍贯:日本。

获奖年度、地点:1970年于尼斯。

获奖前后的工作地点:哈佛大学。

主要成就:解决了在特征零的域上的代数簇的奇点消解,建立了相应定理,并把这一结果向复流形推广,对一般奇点理论做出了贡献。



姓名：S.P. 诺维科夫(Novikov,Sergei Petrovich)。

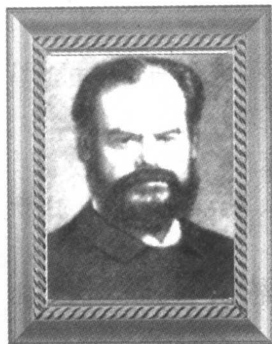
出生日期(获奖时年龄)：1938年3月20日(32岁)。

籍贯：苏联。

获奖年度、地点：1970年于尼斯。

获奖前后的工作地点：斯捷克洛夫数学研究所。

主要成就：微分拓扑学配边理论、叶状结构理论；证明了微分流形有理庞特里亚金示性类的拓扑不变性；孤立子理论。



姓名：J.G. 汤普森(Thompson,John Grggs)。

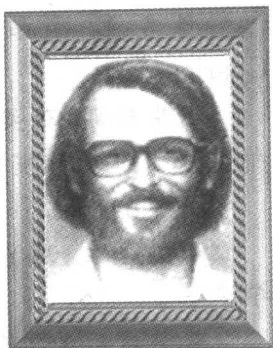
出生日期(获奖时年龄)：1932年10月13日(38岁)。

籍贯：美国。

获奖年度、地点：1970年于尼斯。

获奖前后的工作地点：芝加哥大学。

主要成就：解决有限单群的伯恩赛德猜想和弗洛贝纽斯猜想，在有限群论方面做出了重要贡献。



姓名：D. B. 芒福德（Mumford, David Bryart）。

出生日期（获奖时年龄）：1937年6月11日（37岁）。

籍贯：英国（美籍）。

获奖年度、地点：1974年于温哥华。

获奖前后的工作地点：哈佛大学。

主要成就：代数几何学参模理论，创造性地应用了不变式理论，导致许多新结果，并由此产生了几何不变式论；证明了代数曲面与代数曲线和高维代数簇有一个不同之处，对代数曲面的分类做出了贡献。



姓名：E. 邦别里（Bombieri, Enrico）。

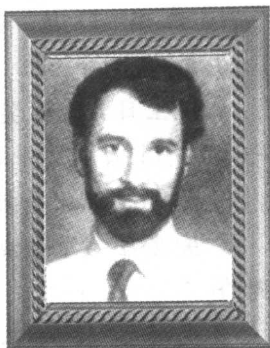
出生日期（获奖时年龄）：1940年11月26日（34岁）。

籍贯：意大利。

获奖年度、地点：1974年于温哥华。

获奖前后的工作地点：米兰大学、比萨大学。

主要成就：改进数论大筛法，得出了所谓邦别里中值公式，证明了哥德巴赫猜想中的（1＋3）；对极小曲面问题的伯恩斯坦猜想提出了反例；给出了有限单群分类问题中一类李型单群的惟一性证明。



姓名:C. 费弗曼(Fefferman, Charles)。

出生日期(获奖时年龄):1949年4月18日(29岁)。

籍贯:美国。

获奖年度、地点:1978年于赫尔辛基。

获奖前后的工作地点:普林斯顿大学。

主要成就:傅里叶级数收敛问题及其与奇异积分算子的联系;发现哈代空间 H^1 与有界平均振动函数空间 BMO 的对偶关系;给出非退化线性偏微分方程局部可解性的一个充分必要条件;证明一个具有光滑边界的严格伪凸域到另外一个的双全纯映射可以光滑地延拓到边界上。



姓名:P. 德利涅(Deligne, Pierre)。

出生日期(获奖时年龄):1944年10月3日(34岁)。

籍贯:比利时。

获奖年度、地点:1978年于赫尔辛基。

获奖前后的工作地点:巴黎高等科学研究所。

主要成就:解决代数几何学中联系素数与有限域中代数方程根的个数的韦伊猜想,以简洁清晰的证明解决了这一代数几何的中心问题,得到了 ζ 函数理论的"韦伊-德利涅定理";对调和分析、多复变函数均有贡献。



姓名:D. 奎伦(Quillen,Daniel)。

出生日期(获奖时年龄):1940年4月22日(38岁)。

籍贯:美国。

获奖年度、地点:1978年于赫尔辛基。

获奖前后的工作地点:马萨诸塞理工学院。

主要成就:解决了代数 K 理论中亚当斯猜想;得到 K 理论中塞尔猜想的证明,并开始将代数归结为拓扑、复配边理论,形成代数 K 理论的基础。他还在同伦理论、形式群理论、同调代数——有限群的上同调论等方面取得重要成果。



姓名:G. A. 马尔古利斯(Margulis, Grigcrii Aleksandrovich)。

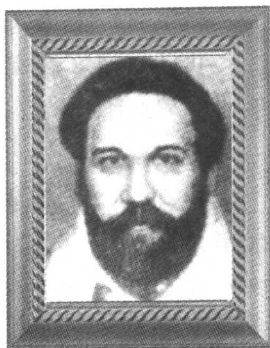
出生日期(获奖时年龄):1946年2月24日(32岁)。

籍贯:苏联。

获奖年度、地点:1978年于赫尔辛基。

获奖前后的工作地点:莫斯科通讯研究所。

主要成就:综合地利用代数、分析和数论的近代成果,特别是各态遍历性理论,彻底解决了关于李群的离散子群的赛尔伯格猜想。



姓名:A. 孔涅(Connes,Alan)。

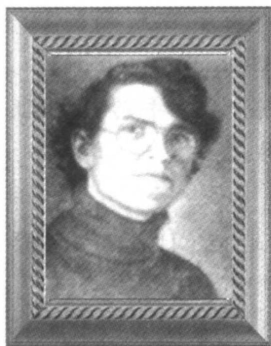
出生日期(获奖时年龄):1947年4月1日(35岁)。

籍贯:法国。

获奖年度、地点:1983年于华沙。

获奖前后的工作地点:巴黎高等科学研究所。

主要成就:从事算子代数研究,引进了新的不变量,将Ⅲ型代数分为子类$Ⅲ_λ$(0≤λ≤1),进一步把这些代数归结为Ⅱ型代数及其自同构,然后对Ⅱ型代数的外自同构进行系统归类,从根本上解决了J. 冯·诺伊曼留下的代数分类问题。



姓名:W. 瑟斯顿(Thurston,William)。

出生日期(获奖时年龄):1946年10月30日(36岁)。

籍贯:美国。

获奖年度、地点:1983年于华沙。

获奖前后的工作地点:普林斯顿大学。

主要成就:讨论了三维流形上的叶状结构,并对一般流形上叶状结构的存在、性质及其分类得出了普遍的结果;借助于计算机,基本完成了三维闭流形的拓扑分类。



姓名：丘成桐（Yau Sheng-Tung）。

出生日期（获奖时年龄）：1949年4月4日（33岁）。

籍贯：中国（美籍）。

获奖年度、地点：1983年于华沙。

获奖前后的工作地点：普林斯顿高等研究所。

主要成就：证明了微分几何中的卡拉比猜想；证明了广义相对论中的正质量猜想；在高维闵科夫斯基问题、三维流形的拓扑学与极小曲面等方面均有创见。



姓名：M. 弗里德曼（Freedman，Michael）。

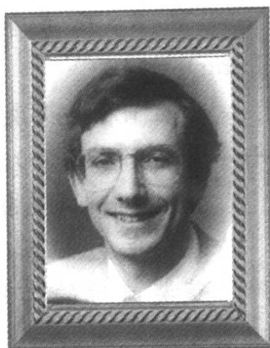
出生日期（获奖时年龄）：1951年4月21日（35岁）。

籍贯：美国。

获奖年度、地点：1986年于伯克利。

获奖前后的工作地点：加利福尼亚大学，加州大学圣地亚哥分校。

主要成就：证明了四维流形拓扑的庞加莱猜想，因而刻画了球面 S^1，并且提供了对更一般的四维流形的、容易陈述但证明很难的分类定理；在偏微分方程、相对论方面也有建树。



姓名:S. 唐纳森(Donaldson, Simon)。

出生日期(获奖时年龄):1957 年 8 月 20 日(29 岁)。

籍贯:英国。

获奖年度、地点:1986 年于伯克利。

获奖前后的工作地点:牛津大学。

主要成就:关于四维流形拓扑的研究。他发现了四维几何学中难以预料与神秘的现象,得出存在"怪异"四维空间的结论,即与标准欧氏空间 R^1 拓扑同胚但不微分同胚的微分流形。



姓名:G. 法尔廷斯(Faltings, Gerd)。

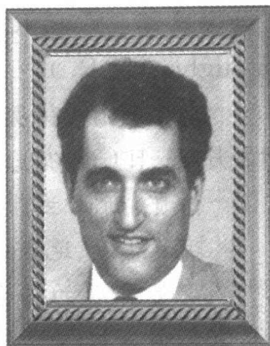
出生日期(获奖时年龄):1954 年 7 月 25 日(32 岁)。

籍贯:德国。

获奖年度、地点:1986 年于伯克利。

获奖前后的工作地点:普林斯顿大学,乌珀塔尔大学。

主要成就:用代数几何学方法证明了数论中的莫德尔猜想;对阿贝簇的参模空间、算术曲面的黎曼-罗赫定理、p-adic 霍奇理论等也有创见。



姓名：E. 威滕(Witten,Edward)。

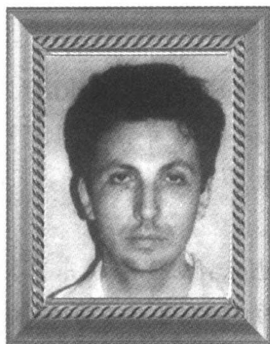
出生日期(获奖时年龄)：1951年8月26日(38岁)。

籍贯：美国。

获奖年度、地点：1990年于东京。

获奖前后的工作地点：普林斯顿高等研究所。

主要成就：弦理论。他对"超弦理论"做出了很大贡献，这一理论完全可能在相对性理论、量子力学和粒子相互作用之间做出统一的数学处理(这是A. 爱因斯坦大半生追求的目标)。他证明了(在陈省身-西蒙斯(Simons)理论的所有情况下)状态空间是二维的。



姓名：V. 德里费尔德(Drinfel′d, Vladimir)。

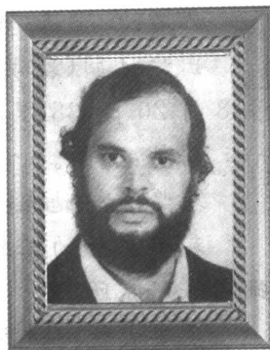
出生日期(获奖时年龄)：1954年2月14日(36岁)。

籍贯：苏联。

获奖年度、地点：1990年于东京。

获奖前后的工作地点：哈尔科夫低温物理研究所。

主要成就：他的工作在"类域"(Galois扩张的分类)的传统理论之内，即在算术领域之内，但建立于代数几何新对象的结构上，他称之为模(modules)。他的主要成就与量子群有关，它是一些代数(Hopf代数)，具有能连续变形的特征。



姓名：V. F. R. 琼斯(Jones, Vaughan, F. R.)。

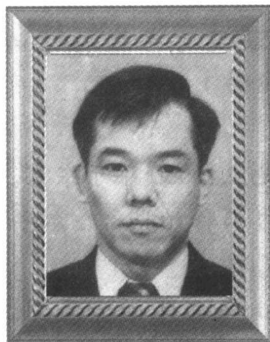
出生日期(获奖年龄)：1952年12月31日(37岁)。

籍贯：新西兰。

获奖年度、地点：1990年于东京。

获奖前后的工作地点：加州大学伯克利分校。

主要成就：纽结理论。他的工作与冯·诺伊曼(Von Neumann)代数中的子因子分数有关，他发现了合痕的一个不变量，它是一个$\sqrt{g}$和$1/\sqrt{g}$的多项式(g是一个变量)：两个同痕的结有相同的不变量。



姓名：森重文(Shigffumi Mori)。

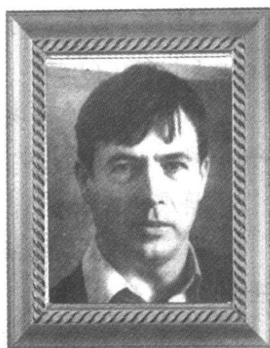
出生日期(获奖时年龄)：1951年2月23日(39岁)。

籍贯：日本。

获奖年度、地点：1990年于东京。

获奖前后的工作地点：京都数学科学研究所。

主要成就：三维代数族的分类。他建立了一种三维代数簇的分类研究，发现了一些变换，它们正好只存在于至少三维的情形——被称为"flip"，从而更新了广中平祐对奇点的研究。



姓名:J. 布尔盖恩(Bourgain, Jean)。

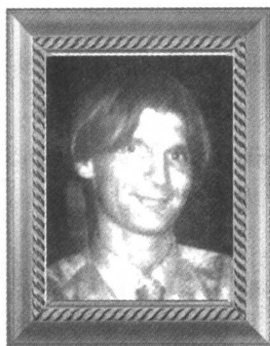
出生日期(获奖时年龄):1954年2月28日(40岁)。

籍贯:比利时。

获奖年度、地点:1994年于瑞士的苏黎世。

获奖前后的工作地点:美国的普林斯顿高等研究所和法国高等研究所。

主要成就:把偏微分方程理论的许多方法和结果从有限维系统地发展到无限维情形。



姓名:P. L. 利翁(Lions, Pierre-Louis)。

出生日期(获奖时年龄):1956年8月11日(38岁)。

籍贯:法国。

获奖年度、地点:1994年于瑞士的苏黎世。

获奖前后的工作地点:巴黎大学。

主要成就:发展了非线性偏微分方程理论中的粘滞性(viscosity)方法和变分方法,在解玻耳兹曼(Boltzmann)方程方面有特殊贡献并将其应用于物理和化学等许多领域。



姓名:J.C. 约克兹(Yoccoz,Jean-Christophe)。

出生日期(获奖时年龄):1957年5月29日(37岁)。

籍贯:法国。

获奖年度、地点:1994年于瑞士的苏黎世。

获奖前后的工作地点:巴黎南大学和法国大学研究所。

主要成就:他将复动力系统的拟周期情形和双曲的(hyperbolic)情形加以复合,从而对更一般的复动力系统的性状和分类做出了深刻的结果,对动力系统的发展予以极大的推动。



姓名:E. 泽尔曼诺夫(Zelmanov,Efim)。

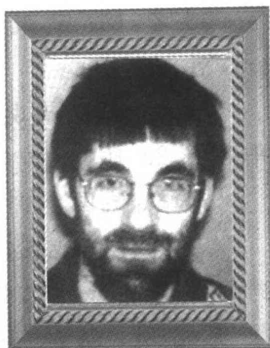
出生日期(获奖时年龄):1955年9月7日(39岁)。

籍贯:俄国。

获奖年度、地点:1994年于瑞士的苏黎世。

获奖前后的工作地点:美国芝加哥大学,威斯康星大学。

主要成就:他证明了群论的弱伯恩赛德(Burnside)猜想(群 $B(r,e)$ 一定有最大的有限商群 $\overline{B(r,e)}$)。



姓名:R.E. 博切尔兹(Borcherds, Richard E.)。

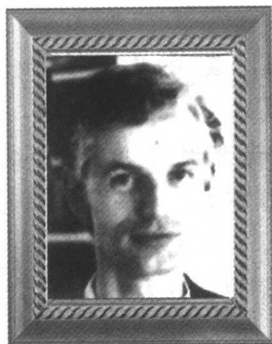
出生日期(获奖时年龄):1959年11月29日(38岁)。

籍贯:英国。

获奖年度、地点:1998年于柏林。

获奖前后的工作地点:剑桥大学,加州大学伯克利分校。

主要成就:对卡茨-穆迪(Kac-Moody)代数、自守形式做出了贡献,特别是他于1989年证明了对所谓"魔群月光猜想(Monstrous Moonshine conjecture)"并发现它与李代数到量子场论一系列主流问题密切相关。



姓名:W. T. 高尔斯(Gowers, W. Timothy)。

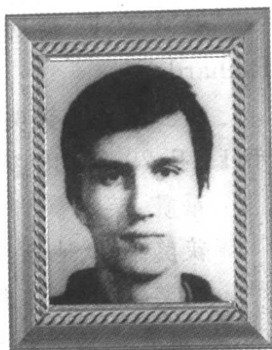
出生日期(获奖时年龄):1963年11月20日(34岁)。

籍贯:英国。

获奖年度、地点:1998年于柏林。

获奖前后的工作地点:剑桥大学。

主要成就:巴拿赫空间理论及组合学。他广泛地利用了来自于组合理论的方法,在无穷维空间中构作具有意想不到特征的造型;他还推翻波兰数学家S. 巴拿赫(Banach)在20世纪20年代提出的"超平面猜想"——无穷维空间一定同它的超平面同构,即他举出反例,否定了这个猜想。



姓名：M. 孔采维奇(Kontsevich, Maxin)。

出生日期(获奖时年龄)：1964年8月25日(33岁)。

籍贯：俄国。

获奖年度、地点：1998年于柏林。

获奖前后的工作地点：法国高等研究所，新泽西的拉特格斯大学。

主要成就：对“线理论”和理论物理学、代数几何与拓扑学的研究做出了贡献。特别是以其对几个重要的猜想的证明而闻名于世，例如，纽结分类猜想的证明。



姓名：C. T. 麦克马兰(Mcmullen, Curtis T)。

出生日期(获奖时年龄)：1958年5月21日(40岁)。

籍贯：美国。

获奖年度、地点：1998年于柏林。

获奖前后工作地点：哈佛大学。

主要成就：对双曲几何、“复杂动力系统”(其更著名的叫法是混沌理论)领域的研究做出了贡献，特别是对“复动力学的主猜想”取得了突破，并提出了许多方法，从而建立了与当代主流数学的诸多联系。



姓名：A. 怀尔斯（Wiles，Andrew）。

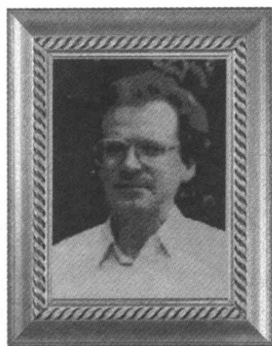
出生日期（获奖年龄）：1953 年 4 月 11 日（45 岁）。

籍贯：英国。

获奖年度、地点：1998 年于柏林。

获奖前后的工作地点：普林斯顿大学。

主要贡献：证明了费马猜想，从而荣获特别贡献奖。



姓名：L. 拉福格（Lafforgue，Laurent）。

出生日期（获奖年龄）：1966 年 11 月 6 日（35 岁）。

籍贯：法国。

获奖年度、地点：2002 年于北京。

获奖前后的工作地点：普林斯顿高等研究所。

主要贡献：在朗兰兹纲领的研究方面取得了重大进展，证明了与函数域情形相应的整体朗兰兹纲领，从而在数论与分析两大领域之间建立了新的联系。



姓名：V. 沃沃斯基（Voevodsky，Voevodsky）。

出生日期（获奖年龄）：1966 年 6 月 4 日（36 岁）。

籍贯：俄国。

获奖年度、地点：2002 年于北京。

获奖前后的工作地点：普林斯顿高等研究所。

主要贡献：发展了新的代数簇上同调理论，从而为深刻理解数论与代数几何提供了新的观点。

附录二　奈望林纳奖及其得主简介

奈望林纳奖是以已故的芬兰数学家 R. H. 奈望林纳的姓氏命名的。

R. H. 奈望林纳(Nevanlinna, Rolf Herman, 1895—1980)早年就读于赫尔辛基大学,1919 年获博士学位。曾任赫尔辛基大学教授和校长,芬兰教育基金会名誉主席,芬兰数学协会主席,国际数学联合会主席和菲尔兹奖评委会主席。他是芬兰科学院院士和许多国家的科学院院士或名誉院士,并荣获芬兰白玫瑰大十字勋章,是芬兰雄师勋章一级爵士。他是解析函数论的著名专家,现代亚纯函数理论的创始人。



为了纪念 R. H. 奈望林纳对数学及芬兰的计算科学所做的贡献,1978 年在赫尔辛基召开的国际数学家大会决定,由赫尔辛基大学出资设立奈望林纳奖(Nevanlinna Prize),它是国际性数学奖。该奖主要奖励在理论计算机科学领域做出杰出贡献的学者,每四年颁发一次,每次奖励一人,在国际数学家大会上颁发。该奖自 1983 年开始颁发,至 2002 年共有六人获奖。

R. 塔筒(Tarjan),美国数学家,1983 年获奖。他在信息科学的数学方面做出了突出贡献,特别是对算法设计和算法分析有重要建树。

L. 瓦利亚特(Valiant),英国数学家,1986 年获奖。他对理论计算机科学这株迅速成长的幼树的几乎每一个分支都有决定性的

影响，或者说，有关计算问题的理论是他最重要、最深刻的贡献。

A. A. 拉兹博洛夫(Razborov)，苏联数学家，1990 年获奖。他对计算复杂性理论有重要建树，特别是对单调布尔函数的复杂度做了很好的工作。

A. 威治森(Wigderson)，以色列数学家，1994 年获奖。他在关于零知识证明方面的工作极有成就。他的结果表明：单项函数对于具有一个证明者(prover)的非平凡零知识证明了存在性是非常本质的，但对于多个证明者的交互作用(interactive)证明则不需要。作为一个应用例子，K 点网格在有不超过 CK 个地方出错(C 为某个常数)，仍是可靠的。

P. 肖尔(Shor)，美国数学家，1998 年获奖。他对量子计算算法有重要贡献，他指出：一台量子计算机能够对一些大整数以这些数长的多项式时间进行因子分解，这样，相对于经典算法它几乎指数般地加快了速度。

M. 苏丹(Sudan)，印度数学家，2002 年获奖。他在概率可析验证明、最优化问题的不可逼近性以及纠错码方面做出了重要贡献。

附录三　克拉福德奖及其得主简介

克拉福德奖是由瑞典实业家 H. 克拉福德捐资设立的。

由于诺贝尔奖中没有考虑数学与天文学等学科，许多科学家认为这是美中不足。为此，瑞典实业家 H. 克拉福德(Crafoord)于 1980 年慷慨捐资，成立了安娜·格蕾塔和霍尔格·克拉福德(Anna-Greta and Holger Crafoord)基金会，对诺贝尔奖没有涉及的几个领域：数学、天文学、地球科学、生物学(特别是生态学)和多发性关节炎的基础研究做出杰出贡献的科学家进行奖励，称为克拉福德(Crafoord Prize)。

H. 克拉福德从事纸浆和纸的生产，制造人造肾脏，从中积累起财富，他还是瑞典著名的银行家。

克拉福德奖由瑞典皇家科学院组织评定，奖金数额与诺贝尔奖相当，每年只评选一个学科中一个或数个在该学科有杰出贡献的获奖者，因此数学的克拉福德奖每六年才有一次。

至今获克拉福德奖的数学家有七个人。

V. I. 阿尔诺德(Arnold)，俄国数学家，1982 年获奖。他在微分方程、泛函分析、实变函数论、拓扑学、代数几何、天体力学、遍历理论方面都有重要建树。特别是他早在上大学期间就解决了希尔伯特第 13 问题的后半部分，1959 年又参考建立了哈密顿动力学的 KAM 理论，发现了阿尔诺德扩散。他对奇点理论做出了杰出贡献，他把奇点理论与李群李代数理论中的 Coxeter 群和 Dynkin 图联系起来，大大扩展了这个领域。他多次被邀请在国际数学家大会作一小时的大会报告。

V. I. 阿尔诺德 1983 年当选为美国国家科学院外籍院士，并于 2001 年荣获了沃尔夫数学奖。

L. 尼伦伯格(Nirenberg),美国数学家,出生于加拿大,1982年获奖。他以分析学中一系列严格工作著称于世,例如解决了长期没有解决的外尔(Weyl)问题,正曲率曲面等度量嵌入 R^3 等。他得出了一般线性偏微分方程的可解性条件;对蒙日-安培型方程解的光滑性,纳维-斯托克斯方程的奇异集合,非线性椭圆方程解的对称性等都有重要贡献;对大范围微分几何也作了杰出贡献,例如关于近复结构,有以他的姓氏命名的纽兰德-尼伦伯格定理。

L. 尼伦伯格 1994 年还荣获了美国数学会颁发的斯蒂尔奖中的终身成就奖,1999 年荣获美国“国家科学奖章”。他曾多次来中国进行学术访问,是南开大学、浙江大学的名誉教授。

P. 德利涅(Deligne),比利时数学家,1988 年获奖。他的主要成就是:解决了代数几何中联系素数与有限域中代数方程根的个数的韦伊猜想,得到了 ζ 函数理论的“韦伊-德利涅定理”。他的结果导出了数论中许多经典假设的证明。他的“混合霍奇结构”的理论,对带有奇点的复代数簇建立了上同调理论。他在调和分析、多复变函数方面均有建树。

1978 年,P. 德利涅当选法国科学院院士和美国艺术与科学研究院院士,同年还荣获了菲尔兹奖。

A. 格罗滕迪克(Grothendieck),法国数学家,生于德国柏林,1988 年获奖。他推广了黎曼-罗赫定理,创立了一整套现代代数几何学抽象理论体系,特别是他所引进的“概型”这个概念把代数几何的抽象程度提高到了新的水平。他还在泛函分析中引进了核空间、张量积;他对同调代数也有重要贡献。

A. 格罗滕迪克 1966 年还荣获了菲尔兹奖。(格罗滕迪克是一个和平主义者,当了解到有些数学研究直接或间接受军方的资助时,他拒领克拉福德奖)。

丘成桐,美籍华裔数学家,出生于中国广东汕头,1994 年获奖。他用微分几何方法,构造了极小曲面,运用非线性方程的技巧,成功地证明了广义相对论中的正质量猜想。他还证明了微分

几何中的卡拉比猜想。他在高维闵科夫斯基问题三维流形的拓扑等方面都有重要建树。

丘成桐 1981 年获美国数学会颁发的维布伦奖,1982 年获菲尔兹奖。他是美国国家科学院院士,中国科学院的外籍院士,中国科学院晨兴数学中心的学术委员会主任。

S. 唐纳森(Donaldson),英国数学家,1994 年获奖。他对四维流形拓扑做出了杰出的贡献,他发现了四维几何学中难以预料的神秘现象——"怪异"的 R^4 空间的出现。他的结果产生了一项新的研究,揭示了流形的一些出人意料的性质(其中与代数簇的微分结构有关的内容得到广泛关注)。他大胆地用瞬子作为一般四维流形上的一种新几何工具,发现了全新的现象。他的工作使数学物理与代数几何美妙地结合起来。

S. 唐纳森 1986 年还荣获了菲尔兹奖。

A. 孔涅(Connes),法国数学家,2001 年获奖。他对算子代数做出了杰出贡献。他创造了现代非交换几何并发现到处(包括在理论物理基础中)存在这一概念,从而革新了算子代数领域的研究,并从根本上解决了 J. 冯·诺伊曼(Neumann)留下的代数分类问题。他的工作也为处理量子和物理中的重整化理论和标准模型提供了强有力的新方法。

A. 孔涅 1982 年当选法国科学院院士,还是美国科学院等许多科学院院士。他 1982 年获菲尔兹奖,2000 年获 CMI 数学奖,另外还获过其他多项科学奖。

附录四 阿贝尔奖及其得主简介

阿贝尔奖是以已故的挪威数学家 N. H. 阿贝尔的姓氏命名的。

N. H. 阿贝尔(Abel, Niels Henrik, 1802—1829)在 1824 年年仅 21 岁时,就解决了困扰数学界 200 多年的五次方程求解问题,严格证明了一般五次和高于五次的方程不可能用根式求解,开辟了研究近世代数方程的道路(包括群论和方程的超越函数的解法);他还是椭圆函数的奠基人之一,发现了椭圆函数的加法定理、双周期性,并引进椭圆积分的反演;他还研究无穷级数,得到了一些判别准则及关于幂级数求和的定理,他是分析学严密化的推进者。



N. H. 阿贝尔在短短 27 年的生命中,在数学上留下了许多光辉的篇章。数学中以他的姓氏命名的有:阿贝尔群、阿贝尔变换、阿贝尔求和法、阿贝尔函数、阿贝尔范畴、阿贝尔扩张、阿贝尔定理、阿贝尔遍历定理、阿贝尔连续性定理、阿贝尔方程、阿贝尔积分方程、阿贝尔微分、阿贝尔积分、阿贝尔射影子、阿贝尔问题,等等。法国著名数学家 C. 埃尔米特(Hermite)指出:“阿贝尔留下的问题够数学家忙 150 年。”德国著名数学家 K. T. W. 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)说:“阿贝尔做出了永恒、不朽的东西,他的思想将永远给我们的科学丰饶的影响。”

为了纪念 N. H. 阿贝尔对数学的杰出贡献,为了弥补诺贝尔

奖中未设数学奖的不足，为了促进数学的发展，挪威政府于 2001 年 9 月宣布，决定设立相当于 4 800 万马克的基金，自 2003 年开始，每年一度对为数学做出杰出贡献的数学家颁发阿贝尔奖(Abel Prize)，奖金为 600 万挪威克朗(现约为 80 万美元)。

自 2003 年开始，阿贝尔奖的得主分别是：

2003 年度，获奖者是法国数学家 J. P. 塞尔(Serre)，获奖的评语是："由于他在赋予数学许多分支以现代的形式中起着关键的作用，这些分支包括拓扑学、代数几何学和数论。"

2004 年度，获奖者是英国数学家 M. F. 阿蒂亚(Atiyah)和美国数学家 I. M. 辛格(Singer)。获奖的评语是："他们发现并证明了指标定理，这一定理贯通了拓扑学、几何、分析学之间的联系，并在数学与理论物理之间架起了一座桥梁。指标定理是 20 世纪数学中的最重要的成就之一。"

2005 年度，获奖者是美国数学家 P. D. 拉克斯(Lax)。获奖的评语是："他对偏微分方程及其计算在理论上和应用上都做出了开创性的贡献。"

附录五 国际数学联合会简介

国际数学联合会(International Mathematical Union,简称IMU)是世界各国和地区数学学术团体联合组成的非政府性的国际学术组织,是国际科学联盟理事会(ICSU)中的一个组织。

国际数学联合会最早成立于1920年,1952年又重新组建。至1987年已有53个国家或地区的数学团体或机构成为国际数学联合会的成员。它们按代表大会的票数分为五级,最高的是第五级,最低的是第一级。每个会员交的会费与它的级数有关,第五级所交的会费是第一级的五倍,第五级在代表大会上的席位数也是最多的。美国、苏联、法国、中国、德国、日本、英国是第五级。

国际数学联合会的宗旨是促进国际间的数学交流、研究、合作,支持和资助四年一度的国际数学家大会和有关的学术会议,鼓励和支持有助于数学科学发展的国际数学活动,资助召开专业性或地区性学术会议。它的主要出版物有《国际数学联合会通报》、《世界数学家人名录》等。

国际数学联合会的组织机构为代表大会和执行委员会。它的工作委员会有数学发展交流委员会、国际数学教育委员会。国际数学联合会每四年在国际数学家大会召开之际举行全体代表大会改选领导机构。执行委员会设主席一名,副主席两名,秘书一名,委员五名。

国际数学联合会1952年重新组建后的历任主席是:

第一任 1952—1955年,M. H. 斯通(Stone,美国);

第二任 1955—1958年,H. 霍普夫(Hopf,英国);

第三任 1959—1962年,R. H. 奈望林纳(Nevanlinna,芬兰);

第四任 1963—1966年,G. W. 德拉姆(de Rham,比利时);

第五任　1967—1970 年，H. 嘉当(Cartan，法国)；
第六任　1971—1974 年，K. 查德里斯卡恩兰(Chandrasekharan，印度)；
第七任　1975—1978 年，D. 蒙哥马利(Montgomery，美国)；
第八任　1979—1982 年，L. 卡尔森(Carleson，瑞典)；
第九任　1983—1986 年，J. 莫泽(Moser，德国)；
第十任　1987—1990 年，L. D. 法捷耶夫(Faddeev，苏联)；
第十一任　1991—1994 年，J. L. 利翁(Lions，法国)；
第十二任　1995—1998 年，D. B. 芒福德(Mumford，美国)；
第十三任　1999—2002 年，J. 帕利斯(Palis，巴西)。
第十四任　2003—　，J. M. 鲍尔(Ball，英国)

附录六　历次国际数学家大会简介

国际数学家大会(International Congress of Mathematcians)是数学家们为了进行数学交流,展示、研讨数学的发展,会见老朋友、结交新朋友的国际性会议,是国际数学界最大的盛会,一般四年举行一次(除了第一、二次世界大战期间曾停顿外)。首次大会举行于1897年,至今共举行了24次。出席的数学家的人数,最少的一次是208人,最多的一次是4 000多人。每次大会一般都邀请一批杰出数学家分别在大会上作一小时的学术报告和在学科组的分组会上作45分钟的学术报告,凡是出席大会的数学家都可以申请在分组会上作10分钟的学术报告,或将自己的论文在会上散发。

现将历次大会简介如下:

第一次　时间:1897年。地点:瑞士苏黎世。参加人数:208人。

主席:K. F. 盖泽尔(Geiser,瑞士数学家、苏黎世工学院教授)。

在大会上作报告的数学家共有4位:J. H. 庞加莱(但他因病缺席,由J. 弗兰纽尔(Franel)替他宣读论文)、A. 胡尔维茨(Hurwitz)、C. F. 克莱因、G. 皮亚诺(Peano)。

这次大会以J. H. 庞加莱报告的《关于纯分析和数学物理》及C. F. 克莱因报告的《目前高等数学问题》著称于世。

第二次　时间:1900年。地点:法国巴黎。参加人数:229人。

主席:J. H. 庞加莱。C. 埃尔米特(Hermite,法国数学家)担任名誉主席。

大会上作报告的数学家共有4位:M. 康托(Cantor)、M. G.

米塔-列夫勒、V. 沃尔泰拉(Volterra)、J. H. 庞加莱。

这次大会以D. 希尔伯特在历史与教育两组联席会上的讲演《未来的数学问题》(在刊印的讲稿中,他共列出23个问题,但他在实际讲演中,因时间关系只讲了其中10个问题,即1,2,6,7,8,13,16,19,21,22),确立了这次巴黎国际数学家大会在数学史上的地位。他认为:"通过对这些问题的研讨,可以期待科学的进步。"

第三次 时间:1904年。地点:德国海德堡。参加人数:336人。

主席:H. 韦伯(Weber,德国数学家)。

在大会上作报告的数学家共有4位:G. 格林希尔(Greenhill)、P. 班勒卫(Painleve)、C. 塞格雷(Segre)、W. 沃廷格(Wirtinger)。

这次大会正值德国著名数学家C. G. L. 雅可比(Jacobi)诞辰100周年,在H. 韦伯致辞后,海德堡大学的数学教授L. 柯尼希贝格(Königsberger)作了纪念C. G. L. 雅可比的纪念演说,他在演说中对C. G. L. 雅可比作了高度的评价。

大会期间还展出了近十年来的一批数学文献、数学仪器和模型。

第四次 时间:1908年。地点:意大利罗马。

主席:P. 布拉塞纳(Blaserna,罗马科学院院长)。意大利国王亲临开幕式会场以表祝贺、欢迎。

被邀请在大会上作报告的数学家共7位:J. H. 庞加莱、G. 达布(Darboux)、D. 希尔伯特、C. F. 克莱因、V. 沃尔泰拉、G. 韦罗内塞(Veronese)、S. 纽科姆(Newcomb)。但是,D. 希尔伯特和C. F. 克莱因都谢绝了邀请;J. H. 庞加莱因病也未能亲临大会作报告。

这次大会上颇具特色的活动是颁发卡西亚(Cuccia)奖,一枚金质奖章和3 000法郎,此奖"以奖赏推进代数挠曲线研究的重要论文"。帕多瓦大学的数学家F. 塞韦里(Severi)荣获此奖。这是

国际数学家大会颁发的各种奖赏中的第一次。

第五次 时间：1912年。地点：英国剑桥。参加人数：708人（但据会议记载"实际出席会议者"是574人）。

主席：C. G. 达尔文（Darwin，英国数学家、物理学家，他是进化论创始人C. R. 达尔文的孙子）。

在大会上作报告的数学家有：E. 波莱尔（Borel）、E. 兰道（Landau）、B. 加利特曾（Galitzen）等。这次报告人的安排注意到纯粹数学与应用数学的平衡。此外，应用数学方面又分成三个小组：工程数学；统计、经济和保险统计数学；数理天文。

大会主席C. G. 达尔文和其他英国的报告人都利用这次机会向到会的数学家强调：英国数学家已最终打破了长期孤立于大陆数学家的状态。

第六次 时间：1920年。地点：法国斯特拉斯堡。来自27个国家的数学家出席了这次大会。

主席：E. 皮卡（Picard，法国数学家）。C. 若尔当（Jordan，法国数学家）担任名誉主席。

剑桥大学的英国数学家J. 拉莫尔（Larmor）爵士作第一个全会报告，他在报告中详细评述了D. 希尔伯特和C. F. 克莱因在第一次世界大战期间的工作。在大会上作报告的还有V. 沃尔泰拉等。

在这次大会期间，正式成立了国际数学联合会（International Mathematical Union，简称IMU），C. J. G. 瓦莱普桑（Vallee-Poussin，比利时数学家）当选为主席。

这次大会不准轴心国的数学家参加，从而遭到了几位头面人物的抵制，认为这种做法不是国际性的。

第七次 时间：1924年。地点：加拿大多伦多。参加人数是第六次大会的两倍。

主席：J. C. 菲尔兹（Fields，加拿大数学家）。

在大会上作报告的数学家有：E. 嘉当（Cartan）、J. M. L. 鲁

(Roux)、S. 平凯莱(Pinchrle)、F. 塞韦里、F. C. M. 斯特默(Stormer)、W. H. 杨(Young)等。这次在大会上的报告全部属于纯粹数学领域。

W. H. 杨准备的讲演题目是《20世纪纯粹数学研究的某些特征》,但他没有提及 D. 希尔伯特在巴黎召开的那次数学家大会上提出的23个问题中的任何一个。

这次大会,轴心国的数学家再次未能参加。对此,大多数美国数学家一直反对排斥德国和其他轴心国的数学家,并对此提出一项决议案,得到意大利、荷兰、瑞典、丹麦、挪威和英国数学家的赞同。

大会接受了一笔钱存入自己的财库,J. C. 菲尔兹开始考虑利用它来设立一项国际数学奖。

第八次 时间:1928年。地点:意大利波伦亚。参加人数:836人。

主席:S. 平凯莱(Pincherle,意大利数学家)。

在大会上作报告的数学家较多,其中有:V. 沃尔泰拉、G. D. 伯克霍夫(Birkoff)等人。V. 沃尔泰拉是至今惟一一位做过4次全会报告的数学家,而且意大利国王 V. 伊曼纽列(Emanuelle)三世也来到会场听他讲演。

第一次世界大战后的第三次大会选择在意大利波伦亚召开,表明数学家希望数学会议只受科学支配而不受政治的控制。

这次大会尽管 D. 希尔伯特身体欠佳,但他率领了60多位德国数学家参加了这次盛会,他非常高兴地告诉与会者:"经过漫长而艰难的时期,世界上所有的数学家的代表又齐聚一堂。为了我们所热爱的这门科学的繁荣,应该如此也必须如此。""数学不分种族……对于数学,整个文明世界构成同一个国家。"

这次会的开幕式在波伦亚大学举行,后去过拉韦纳,闭幕式则在佛罗伦萨举行。

第九次 时间:1932年。地点:瑞士苏黎世。参加人数:667人。其中有20位曾参加过1897年第一次国际数学家大会,当年

的大会主席 C.F. 盖泽尔以 90 岁的高龄参加大会，H. 费尔(Fehr，瑞士数学家、教育家、《国际数学教育》杂志的创办人和编辑)也参加了大会，他是惟一参加了至今历次大会的数学家。当时中国数理学会派熊庆来及在德国留学的李仲珩、许国保参加了这次大会，这是我国数学家第一次参加国际数学家大会。

主席：R. 菲特尔(Fueter，瑞士数学家)。

在大会上作报告的数学家较多，其中有：E. 嘉当、A.E. 诺特及 L. 比贝尔巴赫(Bieberbach)等。邀请 L. 比贝尔巴赫在大会上作报告，是组织委员会为了主动向那些在 1928 年反对过"去波伦亚的人"的数学家表示和解。A.E. 诺特是被邀请在国际数学家大会上作全会演讲的第一位女数学家，而且自她之后被邀请在全会上演讲的女性的数目也非常之少。

这次大会宣布 J.C. 菲尔兹在遗嘱中提供一笔馈赠，作为每届大会颁发一项国际奖金的资金——即从 1936 年开始颁发的菲尔兹奖。

第十次 时间：1936 年。地点：挪威奥斯陆。参加人数：387 人(由于德国希特勒和意大利墨索里尼的上台，以及世界政治和经济形势的剧变，使参加这次大会的数学家比上届减少了将近一半)。中国公推当时正在德国进修的南开大学教授姜立夫代表中国数学会参加大会，但姜立夫因临时有要事急于返国，未能参加。中山大学专派数学教授刘俊贤代表该校出席。

主席：F.C.M. 斯托默(Stomer，挪威数学家)。

在大会上作报告的数学家有：E. 嘉当(这是他在国际数学家大会第三次作全会报告)、L.V. 阿尔福斯等。

这次大会虽然出席的人数相对较少，但开得很隆重，挪威国王和王后在皇宫举行了欢迎招待会，挪威外交部长作了热情洋溢的讲话，他说："尽管我不够格归入数学初学者的行列，但敢大胆地称赞你们的科学，它不愧是扩展人类智力的主将"。

在这次大会上首次颁发了菲尔兹奖，获奖者是：L.V. 阿尔福

斯、J. 道格拉斯。由挪威国王将奖章授予了他们。C. 卡拉西奥多里(Carathécdcry)对两位获奖者的主要成就作了评介。

第十一次 时间:1950 年。地点:美国坎布里奇。参加人数:1 700 多人,达到过去历次大会中人数最多的两倍。

主席:O. 维布伦(Veblen,美国数学家)。

在大会上作报告的数学家共有 22 位(有 15 位出生于美国或在美国上大学或从事数学研究工作),其中有 H. 嘉当、A. 韦伊、陈省身等。

这次菲尔兹奖得主是:L. 施瓦尔茨、A. 赛尔伯格。由 H. 玻尔(Bohr)对两位获奖者的主要成就作了评介。

这次大会,社会主义阵营国家的数学家无人到会,但苏联科学院院长 S. 沃维洛夫(Vaivlov)发来了预祝大会成功的贺电。

第十二次 时间:1954 年。地点:荷兰阿姆斯特丹。参加人数:1 553 人。

主席:J. A. 斯豪滕(Schouten,荷兰数学家)。

在大会上作报告的数学家有:I. M. 盖尔范德、A. N. 柯尔莫哥洛夫、A. 韦伊、J. 冯·诺伊曼、K. 博苏克(Borsuk)、J. 内曼(Neymen)、A. 塔斯基(Tarski)、P. S. 亚历山德罗夫(Alexandrov)、S. M. 尼科尔斯克(Nikolski)等。J. 冯·诺伊曼按照 D. 希尔伯特的讲演方式提出了若干重大的数学问题——它们将有助于数学在 20 世纪下半叶的进步,但由于他过度劳累已病得很重,故未能将其讲演的手稿付印出版。我国著名数学家华罗庚教授收到邀请在分组会上作报告,但因故未能成行。

这次菲尔兹奖得主是:小平邦彦和 J. P. 塞尔。由 C. H. H. 外尔对两位获奖者的主要成就作了精彩的评介。上两次都是由该届菲尔兹奖评委会主席或委员来介绍获奖者的主要成就,在 C. H. H. 外尔这位名家执行此项任务之后,评介获奖者的成就便都由研究该领域的专家来担任了。

第十三次 时间:1958 年。地点:苏格兰爱丁堡。参加人数:

1 658 人。

主席:W. V. D. 霍奇(Hodge,英国数学家)。他说:“为了数学的健康发展,由数学中所有分支的代表举行定期的聚会是必要的。”他认为国际数学家大会“乃是防止过度专门化这种危险的安全保障,有不可估量的价值。”

这次菲尔兹奖得主是 K. F. 罗斯和 R. 托姆。由 H. 达文波特(Davenport)和 H. 霍普夫(Hopf)分别对两位获奖者的主要成就作了评介。

这次大会做出了一项革新,自 1897 年以来每次大会总是把代数和数论在分组时排在第一组,而本次大会则将逻辑和数学基础排在了它们之前。我国著名数学家华罗庚、吴文俊教授都收到邀请在分组会上作报告,但因故未能成行。

第十四次 时间:1962 年。地点:瑞典斯德哥尔摩。参加人数:3 000 多人。

主席:R. H. 奈望林纳(Nevanlinna,芬兰数学家),他同时是国际数学联合会主席和菲尔兹奖评委会主席——这种三位一体的角色还没有哪一次的主席扮演过。

在大会上作报告的数学家有:I. M. 盖尔范德、L. V. 阿尔福斯等人。

这次菲尔兹奖得主是:L. V. 赫尔曼德尔和 J. W. 米尔诺。由瑞典国王向他们颁发奖章,由 L. 加丁和 H. 惠特尼分别对两位获奖者的主要成就作了评介。

本次大会的组织委员会主席 O. 弗罗斯特曼(Frostman)认为:“数学本身正在如此迅速地发展,恐怕没有一个人能概观研究前沿的状况,只有在国际合作的基础上联合努力,才可能了解数学的全貌。”

第十五次 时间:1966 年。地点:苏联莫斯科。会议注册人数:5 594 人,实际到莫斯科的是 4 000 多人,超出以往任何一次的人数。会议共分 15 个小组,几乎是上次分组的两倍。

主席:I. G. 彼得罗夫斯基(Petrovski,苏联数学家)。

在大会上作报告的数学家共 17 位。其中,9 人来自英国和美国,5 位是苏联人,2 人来自西德,1 人来自法国。

本次大会报告人似乎达成了默契,大家都用本国语言讲演。

由于一项匿名捐款充实了菲尔兹奖的基金,评选委员会主席 G. 德拉姆(De Rham)汇报了这一情况,并说明由于 30 年前首次颁奖以来数学领域已大大扩展,因此颁奖人数“可以审慎地”增加到每次 4 人。这次菲尔兹奖得主是:M. F. 阿蒂亚、P. J. 科恩、A. 格罗腾迪克、S. 斯梅尔。苏联科学院院长 M. V. 凯尔戴什(Keldysh)向他们颁发奖章。由 H. 嘉当、A. 丘奇(Churcn)、J. A. 迪厄多内、R. 托姆分别对 4 位获奖者的成就作了评介。

这次大会上宣读了 2 000 多篇学术报告和报道,从中可以看出现代科学发展的两个重要趋势:一方面,学科日趋专门化;另一方面,各学科之间的相互渗透又形成整体化的趋势。

第十六次 时间:1970 年。地点:法国尼斯。参加人数:2 811 人。

主席:J. 勒雷。P. A. 蒙泰尔(Montel,法国数学家)以 94 岁高龄担任名誉主席。

在大会上作报告的数学家有:陈省身、I. M. 盖尔范德、L. S. 庞特里亚金等人。几乎所有大会报告人都用英语讲演,惟一的例外是 L. S. 庞特里亚金,他用了法语。这显示了国际数学家大会在使用语言方面的变化,意味着英语成为各国数学家交往的共同语言。

这次大家取消了 10 分钟的论文宣读这种报告形式,取而代之散发了 265 篇打印的个人论文通报。

这次菲尔兹奖得主是:A. 贝克、广中平祐、S. P. 诺维科夫、J. G. 汤普森。法国总统在巴黎接见了他们 4 人和所有曾荣获菲尔兹奖的法国人,由 P. 图兰(Turan)、A. 格罗腾迪克、M. F. 阿蒂亚、R. D. 布劳尔(Brauer)分别对 A. 贝克、广中平祐、S. P. 诺

维科夫、J. G. 汤普森的主要成就作了评介。

第十七次 时间:1974 年。地点:加拿大温哥华。参加人数是多伦多那次大会的 8 倍之多。

主席:H. S. M. 考克斯特(Coxeter,英国数学家,后任加拿大多伦多大学教授)。他在开幕词中说:"从前的数学是身居象牙塔的特殊人物研究的对象,现在的数学已变得非常普及,甚至影响到体育:(英式)足球做成切掉尖角的 20 面体形状,电子计算机到处生根发芽,所有大学的数学系都在扩展以接纳大量渴求知识的学生。"他认为战后数学在世界上的地位发生了彻底的变化。

我国著名数学家华罗庚收到邀请在分组会上作报告,但因故未能成行。

这次菲尔兹奖得主是:E. 邦别里和 D. B. 芒福德。由 K. 查德里斯卡恩兰和 J. 塔特(Tate)分别对两位获奖者的成就作了评介。

第十八次 时间 1978 年。地点:芬兰赫尔辛基。参加人数:3 000 多人。

主席:O. 莱托(Lehto,赫尔辛基大学数学家)。R. H. 奈望林纳担任名誉主席。

在大会上作报告的数学家共 15 人:第一个在大会讲演的是首届菲尔兹奖得主 L. V. 阿尔福斯;A. 孔涅、W. 色斯顿、A. 韦伊、丘成桐、S. P. 诺维科夫等人都作了大会讲演。

这次大会收到个人提交的论文达 2 000 多篇。

这次菲尔兹奖得主是:C. 费弗曼、P. 德利涅、D. 奎伦、G. A. 马尔古利斯。由 L. A. E. 卡尔森(Carleson)、J. 蒂茨(Tits)、I. M. 詹姆斯(James)、N. M. 卡茨(Katz)分别对 4 位获奖者的成就作了评介。

这次大会首次邀请一位数学家作与会徽有关的报告,他就是苏联数学家 Yu. I. 马林。他要听众仔细观察会徽,他说:"你将很容易辨认出会徽的图案是著名的'模结构'的一部分。"

我国著名数学家陈景润收到了在此次会上作 45 分钟报告的邀请,但因故未能成行。

第十九次 时间:1983 年。地点:波兰华沙。参加人数:2 300 多人。

主席:C. 奥列奇(Olecn)。W. 奥里茨(Orlicz,波兰数学家)担任名誉主席。

在大会上作报告的数学家有:肖荫堂、R. 托姆等人。

这次菲尔兹奖得主是:A. 孔涅、W. 瑟斯顿、丘成桐。由 H. 阿拉基(Araki)、C. T. C. 沃尔(Wall)、L. 尼伦伯格(Nirenberg)分别对 3 位获奖者的主要成就作了评介,但由于 C. T. C. 沃尔和 L. 尼伦伯格没有到会,他们的评介由他人代读。

在这次大会上还首次颁发了奈望林纳奖,该奖是芬兰为纪念她的著名数学家 R. H. 奈望林纳而设的,以表彰他对整个科学以及芬兰的计算机科学所做的贡献。R. 塔简(Tarjan,美国数学家)因其在信息科学的数学方面的杰出成就,成为该奖的第一个得主。

国际数学联合会秘书 O. 莱托在闭幕式上说:"作为个人,我们每个人当然都会选择自己的政治观点,但当大家汇集一起组织数学的国际性合作时,就应完全避开政治。我们这门美好的科学应成为联结众人的桥梁,使我们真正结成一个数学大家庭。"

我国著名数学家陈景润、冯康分别收到了在此次会上作 45 分钟报告的邀请,但因故未能成行。

第二十次 时间:1986 年。地点:美国伯克利。参加人数:3 500 多人。我国有 25 位数学家参加。

主席:A. 格利森(Gleason,美国数学家)。L. V. 阿尔福斯担任名誉主席。

在大会上作报告的数学家共有 16 位,他们是:S. 斯梅尔、L. 德布兰格斯(de Branges)、S. 唐纳森(Donaldson)、G. 法尔廷斯(Faltings)、J. M. 费罗利奇(Fröhich)、F. W. 格林(Gehling)、M. 格罗莫夫(Gromov)、H. W. 伦斯特拉(Lenstra)、R. M. 舍恩

(Schoen)、A. 舍恩黑格(Schönhaga)、S. 希拉(Shelah)、A. V. 斯科罗霍德(Skorohod)、E. M. 斯坦(Stein)、A. A. 萨斯林 Suslin)、D. A. Jr. 沃甘(Vogan)、E. 威滕(Witten)。有两位中国血统的数学家应邀作了 45 分钟的报告,他们是吴文俊教授和台湾的张圣容教授。

这次兹菲尔兹奖得主是:M. 弗里德曼、S. 唐纳森、G. 法尔廷斯。由 J. W. 米尔诺、M. F. 阿蒂亚、B. 梅热(Mazur)分别对 3 位获奖者的主要成就作了评介。

这次奈望林纳奖的得主是 L. 瓦利亚特(Valiant,英国数学家),他对理论计算机科学这株迅速成长的幼树的几乎每一个分枝均有决定性的影响。或者可以说,有关计算问题的理论是他最重要、最成熟的贡献。

本次大会的名誉主席、首届菲尔兹奖得主 L. V. 阿尔福斯亲自将菲尔兹奖章和奈望林纳奖授予上述 4 人。

本次大会的特色之一是更多地强调计算机科学。

出席这次大会的许多数学家,尤其是美国数学家,对未来考虑得很多。美国总统里根的代理科学顾问 R. 约翰逊(Johson)极力主张,数学家应集中精力关注一下数学教育。M. 弗里德曼发表他荣获菲尔兹奖章的感想时说:"浇灌数学之树使之常青成了我义不容辞的责任……最根本的是要努力改变社会导向,使孩子们从上小学起就能喜欢数学而不是视数学为畏途。"

在 8 月 11 日下午举行的大会闭幕式上,当国际数学联合会主席 J. 莫泽在讲话中提到中国数学会加入了国际数学联合会时,全场响起了热烈的掌声。

第二十一次 时间:1990 年。地点:日本京都。参加人数:近 4 000 人。中国大陆有 65 位数学家参加。

主席:小松彦三郎(Komatsu Hikosaburo,京都大学教授)。

在大会上作报告的数学家共 15 位,他们是:K. 乌伦贝克(Uhenbeck)、森重文、A. 弗洛尔(Floer)、Y. 艾哈拉(Ihara)、

S. 库克(Cook)、A.J. 马伊达(Majda)、S. 布洛克(Bloch)、R.B. 梅尔罗斯(Melrose)、G. 勒斯泰格(Lusztig)、A. 瓦切科(Varchenko)、L. 洛瓦斯基(Lovász)、V.F.R. 琼斯(Jones)、Y. 赛奈(Sinai)、G. 马尔古利斯(Margulis)、B.L. 费根(Feigin)。中国有两位青年数学家田刚、林芳华应邀作了45分钟报告。

这次菲尔兹奖得主是:V.F.R. 琼斯、森重文、V. 德里费尔德、E. 威滕。由J. 伯曼(Birman)、广中平祐、M. 杰博(Jimbo)、L. 法迪夫(Faddeev)分别对4位获奖者的主要成就作了评介。

这次奈望林纳奖得主是A. 雷博罗夫(Razborov,苏联数学家),他对计算复杂性理论有重要建树,特别是对单调布尔函数的复杂度作了很好的工作。

本次大会,以其在研究上与物理学或多或少的联系而给人以深刻的印象。一个趋势很好地说明了这一点,这次4位菲尔兹奖得主中的3位:V.F.R. 琼斯、E. 威滕、V. 德里费尔德的工作都与物理学有深刻的联系。这个现象并不出人意料,但它却不能不引起对数学的地位和作用的激励和反思。物理学和数学间的密切关系和这两门科学一样古老,对此,人们只要想到阿基米德或G. 伽利略(Galilei),想起他们所说的"自然是用数学的语言描绘的",或者想到I. 牛顿,或更晚些的J.H. 庞加莱就行了。此外,对大会成果的认真分析,揭示了这些题材的持久性和最基本研究的连续性。

第二十二次 时间:1994年。地点:瑞士苏黎世。参加人数:2 300多人,其中有中国大陆数学家50人,台湾地区数学家10人和香港数学家8人。

名誉主席:B. 埃克曼(Eckmann)。

在大会上作报告的数学家共17位,他们是:R. 玛利安(Marian)、P.L. 利翁(Lions)、C.H. 陶布斯(Taubes)、J. 布尔盖恩(Bourgain)、J.B. 凯勒(Keller)、M. 孔采维奇(Kontsevich)、B. 拉斯兹洛(Laszlo)、J.H. 康韦(Conway)、F. 朱尔格(Jürg)、J.C.

约克兹(Yoccoz)、S. R. S. 瓦拉德汉(Varadhan)、D. 沃伊卡莱斯卡(Voiculescu)、V. A. 瓦西列夫(Vassiliev)、I. 多布奇斯(Daubechies)、P. 西摩(Seymour)、A. 怀尔斯(Wiles)、E. 泽尔曼诺夫(Zelmanov)、A. 威杰尔松(Widgerson)。

这次菲尔兹奖得主是:J. 布尔盖恩、P. L. 利翁、J. C. 约克兹、E. 泽尔曼诺夫。由 L. 卡法里利(Caffarelli)、S. R. S. 瓦拉德汉(Varadhan)、A. 道戴(Douady)、W. 费特(Feit)分别对 4 位获奖者的主要成就作了评介。

此次奈望林纳奖得主是 A. 威杰尔松(Widgerson,以色列大学的数学家),他在关于零知识证明方面的工作极有建树。他的结果表明:单向函数对于具有一个证明者(Prover)的非平凡零知识证明了存在性是非常本质的,但对于多个证明者(Prover)的交互作用(interactive)证明则不需要。作为一个应用例子,K 点网络在有不超过 CK(C 为某个常数)个地方出错,仍然是可靠的。

被邀请作 45 分钟报告的中国大陆数学家有 4 人,他们是:张恭庆(北京大学)、马志明(中国科学院应用数学所)、励建书(美国马里兰大学)、李俊(美国)。

第二十三次 时间:1998 年。地点:德国柏林。参加人数:3 348 人。中国有 63 位数学家(包括台湾地区 11 人)参加。

主席:M. 格罗特施尔(Grötschel)。F. E. P. 希策布鲁赫(Hirzebruch)担任名誉主席。

在大会上作报告的数学家共有 21 位,他们是:J. K. 莫泽(Moser)、P. W. 肖尔(Shor)、E. 赫鲁索夫斯基(Hrushovski)、D. 麦克达夫(McDuff)、I. G. 麦卡唐纳德(Macdonald)、H. H. W. 霍弗(Hofer)、V. 沃沃斯基(Voevodsky)、W. 哈克布希(Hackbusch)、K. 西格蒙德(Sigmund)、M. 塔拉格兰德(Talagrand)、C. 韦费(Vafa)、G. C. 帕普尼柯鲁(Papanicolaou)、三轮哲二(Tetsuji Miwa)、G. 皮西尔(Pisier)、C. 德尼格尔(Deninger)、G. 加勒沃蒂(Gallavotti)、J. M. 比斯马特(Bismut)、M. 维纳(Viana)、S. 马拉

特(Mallat)、P. 萨纳克(Sarnak)、P. 戴科尼斯(Diaconis)。

这次菲尔兹奖得主是:R. E. 博切尔兹、W. T. 高尔斯、M. 孔采维奇、C. T. 麦克马兰;A. 怀尔斯荣获特别贡献奖。J. 利波斯凯(Lepowsky)、J. 林登斯特劳斯(Lindenstrauss)、Yu. I. 马宁(Manin)、J. 米尔诺(Milnor)分别对前 4 位获奖者的主要成就作了评介。

此次奈望林纳奖得主是 P. W. 肖尔(美国数学家),他对量子计算(quantum computation)、算法有重要建树。

中国有 4 位旅美中青年数学家应邀在会上作了 45 分钟报告,他们是:张寿武、阮永斌、夏志宏、侯一钊。

在 8 月 27 日下午的闭幕式上,国际数学联合会主席 D. 芒福德宣布下届国际数学家大会将于 2002 年在中国北京举行。接着,国际数学联合会下届主席 J. 帕利斯和中国数学会理事长张恭庆先后讲话。张恭庆代表 ICM'2002 东道主,欢迎世界各国与地区的数学家 4 年后在北京聚会,会场上响起了热烈的掌声。最后由 ICM'98 组织委员会主席 M. 格罗特施尔宣布本届国际数学家大会闭幕。

第二十四次　时间 2002 年。地点:中国北京。参加人数:4 000 多人。中国有 1 000 多位数学家参加。

主席:吴文俊。陈省身担任名誉主席。组委会主席是马志明。

在大会上作报告的数学家共 20 位,他们是:L. 拉福格(Lafforgue)、D. B. 芒福德、田刚、L. A. 卡法里里(Caffarelli)、V. 卡克(Kac)、U. 哈格鲁普(Haagerup)、N. 阿朗(Alon)、S. 古尔格沃斯塞(Goolgwasser)、F. C. 柯万(Kirwan)、肖荫堂、M. J. 霍普金斯(Hopkins)、D. N. 阿诺德(Arnold)、A. 布雷桑(Bressan)、H. 纳卡吉麦(Nakajima)、R. L. 泰勒(Talor)、H. 凯斯滕(Kesten)、张圣蓉、D. L. 多诺霍、L. D. 法迪弗(Fadeev)、E. 威腾(Witten),其中田刚、肖荫堂、张圣蓉(女)是华人数学家。另外,还有 22 位华人数学家应邀作了 45 分钟报告,他们是:陈木法、陈秀雄、丁伟岳、鄂

维南、葛立明、郭雷、洪家兴、李伟光、李岩岩、刘克峰、刘太平、龙以明、曲安京、戎小春、王诗宬、汪徐家、邬似珏、萧树铁、辛周平、严加安、张伟平、周向宇。

组委会还在大会的会前与会后，安排了46个卫星会议。为了使公众更好地了解数学，加强数学与社会的联系，还组织了公众报告(General Public Talks)，邀请中国的吴文俊、美国的J.F.纳什(Nash)、美国的普维(Poovey)就数学的作用和对其他科学乃至对社会的影响等方面做了公众报告。参加国际数学家大会的"弦理论"卫星会议的英国S.W.霍金(Hawking)也做了一场公众报告。

这次菲尔兹奖得主是：L.拉福格(Lafforgue)、V.沃沃斯基(Voevodsky)。

这次奈旺林纳奖得主是M.苏丹(Sudan，印度数学家)，他的主要贡献是：概率可析验证明、最优问题的不可逼近性以及纠错码。

8月28日下午最后一个小时大会邀请报告结束后，接着举行了隆重而简朴的闭幕式，国际数学联合会现任主席J.帕利(Palis)与下届主席J.M.鲍尔(Ball)先后讲话，赞扬本届国际数学家大会开得非常成功，并对组委会出色的组织工作表示高度赞赏，同时，宣布下届国际数学家大会将于2006年8月在西班牙马德里举行。最后，本届组委会主席、中国数学会理事长马志明讲话，宣布本届国际数学家大会胜利闭幕。

附录七 国际数学教育委员会及国际数学教育大会简介

国际数学教育委员会(International Commission on Mathematical Instruction)是根据1908年4月在意大利罗马召开的第四次国际数学家大会决议建立的国际数学教育机构。当时由德国数学家C. F. 克莱因(Klein)、英国数学家G. 格林希尔(Greenhill)、瑞典数学家H. 费尔(Fehr)组成中央委员会,并立即开始工作,由他们三人分任主席、副主席、秘书长,进行有关数学教育和理科教育的活动,合理规划各级数学教育的进一步发展,并使公众认识数学教育的重要性。1912年中央委员会扩大,增补了美国数学家D. E. 史密斯(Smith)为副主席、意大利数学家G. 卡斯泰尔诺沃(Castelnuovo)、法国数学家J. 阿达玛(Hadamard)及E. 丘贝尔(Czuber)为委员。到1914年参加国际数学教育委员会的国家已经达到28个。在这期间分别在布鲁塞尔(1910年8月)、米兰(1911年11月)、剑桥(1912年8月)、巴黎(1914年4月)举行了四次国际会议。国际数学教育委员会的工作在第一次世界大战时被迫中断,一直到1928年都没有恢复工作。后来虽然重建了中央委员会,并先后由D. E. 史密斯(1928—1932年)和J. 阿达玛(1932—1952年)任主席,但是由于第二次世界大战没有开展多少工作。

1952年新建的国际数学联合会(IMU)重建国际数学教育委员会时,曾委任了一个委员会,该委员会的委员是:H. A. L. 贝恩克(Behnke)、A. 夏特莱(Châtelet)、H. 费尔、R. L. 贾弗里(Jeffery)、G. 库雷帕(Kurepa)。1954年这个委员会成为正式的国际数学教育委员会的执行委员会。

国际数学教育委员会由国际数学联合会选出的十位一般委员、四位当然委员以及每个成员国委派一位代表组成。从1954年起，国际数学教育委员会的历届主席是：

1954—1955年为A. 夏特莱(Chatelet)；
1955—1958年为H. A. L. 贝恩克(Behnke)；
1959—1962年为M. H. 斯通(Stone)；
1963—1966年为A. 利什内罗维奇(Lichnerowicz)；
1967—1970年为H. 弗勒登塔尔(Freudenthall)；
1971—1974年为M. J. 莱特希尔(Lighthill)；
1975—1978年为S. 弥永昌吉(Iyanaga)；
1979—1982年为H. 惠特尼(Whitney)；
1983—1986年为J. P. 卡亨(Kahane)；
1987—1990年为J. P. 卡亨；
1991—1994年为M. de 古兹曼(Guzman)；
1994—1998年为M. de 古兹曼。我国华东师范大学张奠宙教授是本届执行委员会委员。
1998—2002年为H. 巴斯(Bass)。我国华东师范大学校长王建磐教授是本届执行委员会委员。
2003年— 为H. 巴斯。

国际数学教育委员会赞助、支持各种有关数学教育的国际会议及出版刊物，它的机关刊物是《数学教育国际评论》。

国际数学教育委员会从1969年起每四年召开一次国际数学教育大会(ICME)。现将历届大会简介如下：

第一届(ICMEⅠ) 时间：1969年8月。地点：法国里昂。参加人数：约650人。

第二届(ICMEⅡ) 时间：1972年8月。地点：英国埃克塞特。参加人数：约1 400人。

第三届(ICMEⅢ) 时间：1976年8月。地点：德国卡尔斯鲁厄。参加人数：约1 800人。

第四届(ICMEⅣ) 时间:1980年8月。地点:美国伯克利。参加人数:约1 800人。中国第一次派了5名代表参加,我国著名数学家华罗庚教授被邀在全体会上作了一小时报告。

第五届(ICMEⅤ) 时间:1984年8月。地点:澳大利亚阿德莱德。参加人数;约1 800人。

第六届(ICMEⅥ) 时间:1988年7月27日至8月3日。地点:匈牙利布达佩斯。参加人数:约3 000人。

第七届(ICMEⅦ) 时间:1992年8月。地点:加拿大魁北克。参加人数:2 671人。

第八届(ICMEⅧ) 时间:1996年7月。地点:西班牙塞维利亚。参加人数:约4 000人。

第九届(ICMEⅨ) 时间:2000年7月31日至8月6日。地点:日本东京的幕张。参加人数2 000多人。

第十届(ICMEⅩ) 时间:2004年7月5日至7月11日。地点,丹麦哥本哈根。参加人数约1 750多人。

附录八 工业与应用数学国际会议简介

工业与应用数学国际会议(International Conference on Industry and Applied Mathematics,简称 ICIAM)旨在突出应用数学的重要性,并在国际科学界建立起应用数学的地位。它是应用数学和计算数学界以及着重以数学为工具的工程师和科学家之间为了交流、展示、研讨应用数学的成就与发展的国际性盛会。

第一次工业与应用数学国际会议是由西德 GAMM(Gesellschaft fur Angewandte Mathematik und Mechanik)、英国 IMA(Institute of Mathematics and Applications)、美国 SIAM(Society for Industrial and Applied Mathematics)、法国 SMAI(Société de Mathematiques Appliquées et Industrielles)发起并资助的,于 1987 年 6 月 29 日至 7 月 3 日在法国巴黎召开,这次会议简称为 ICIAM-87。参加这次会议的有来自 50 多个国家的 1 800 多人,我国大陆及台湾地区共有 16 位学者(大陆 9 位)参加了这次盛会。在这次会议上,法国科学院书记 P. 杰曼(Germain)致开幕词,4 个发起组织致欢迎词。会议的学术报告以下述 4 种形式进行:大会邀请报告(共 16 个)、微型讨论会邀请报告(共 69 个)、分组报告(数以百计)、张贴展示(数以百计)。16 个大会邀请报告都程度不同地涉及到计算机、应用数学与基础数学的相互渗透与相互推动。从这次会议展示出应用数学的成果越来越多地应用于国民经济,国际应用数学界已经做出了高水平的工作。正如工业与应用数学国际会议委员会主席 R. 特玛姆(Temam)指出的:"第一次工业与应用数学国际会议旨在突出应用数学的重要性,并在国际科学界建立起应用数学的地位。"

第二次工业与应用数学国际会议(ICIAM91)是 1991 年 7 月

8 日至 12 日在美国华盛顿召开的，正式注册的人数超过了 2 100 人。我国大陆及台湾地区都有学者参加，大陆共去了 12 位学者。会议没有开幕式和闭幕式，一开始就是学术报告和各种形式的学术交流活动。大会有 31 个分组，按大会邀请报告(每人 1 小时，共 20 个)、微型讨论会邀请报告(每人 30 分钟，共有近 190 个微型讨论会)、分组会报告(每人 15 分钟，共有分组会近 100 个)、张贴展示(共分 25 个组)4 种方式进行学术交流，还辅以规模很大的书展(包括各种软件包的展示与销售)。这次会议充分反映了工业与应用数学迅速发展的势头，特别是与解决现实世界中真正的实际问题相结合的趋势。本次会议程序委员会主席、美国华盛顿大学的 R. E. 奥马莱格(O'Malleg)写道："活动日程展示了正在世界范围内进行研究的各种应用数学和计算数学的典型问题——从传统的应用数学到现代技术以及由工业和社会的需要提出的数学问题。""看来可以肯定地说，在世界范围内推行技术和生活的质量方面，数学正在变得日益有用和重要。"工业与应用数学国际会议委员会主席 R. 特玛姆写道："本次会议标志着世界范围的应用数学家的共识，即他们有共同的专业和兴趣。会议的活动很好地说明了数学和计算机已经用来解决现实世界中的重要问题。"在这次会议期间，ICIAM 委员会举行了会议(中国工业与应用数学会理事长、清华大学应用数学系主任肖树铁教授出席了这次会议)讨论、表决通过接纳中国工业与应用数学会(CSIAM)、日本工业应用数学学会(JSIAM)、巴西应用与计算数学学会(SBMAC)、以色列应用数学会(ISAM)为工业与应用数学国际会议委员会(CICIAM)的正式会员，并接纳苏联应用数学会(USSR AAM，原定于 1992 年成立)为观察员会会员。这次工业与应用数学国际会议于 1991 年 7 月 12 日下午 6:30 左右当全部学术报告结束后自动闭幕。

第三次工业与应用数学国际会议(ICIAM95)是 1995 年 7 月 3 日至 7 日在德国汉堡召开的，正式注册的人数近 1 000 人，我国

大陆及台湾地区都有学者参加。这次大会注重解决实际问题中的数学和计算方法，共有 31 个大会报告，题材、内容丰富多彩，包括：自动信息中心设计中的统计过程的工业应用；纯粹和应用数学中的奇性和分歧；随机离散事件问题；渐近性态和力学；稀薄气体动力学中的数学问题；小波；从动力学理论导出的带电粒子迁移的宏观模型；数学金融学；全球气候建模；与气候模型有联系的某些数学问题；弹性液体的流体动力学；相转移中的迟滞性；计算机科学；控制论中的动力系统和几何力学；非线性控制和离散事件系统；计算机视觉中的统计方法；用混合矩阵来进行系统分析中的结构方法；质点法——理论和应用；接触——碰撞计算分析；健康和得病时免疫系统的数学建模；生物流体力学中的浸没边界法；理论和实践机器人学；工业过程中的计算流体动力学；不可压黏性流的计算；火焰流相互作用动力学的若干问题；数学和高新技术；即便是不稳定的高斯消去法为什么还能工作；信号、系统、控制；某些奇异摄动问题的杂交渐近数值方法等。中国工业与应用数学会理事长曾庆存教授在大会上作了题为《残渣沉积和有关的工程问题——自然控制论的一个例子》的报告。这些报告展现了数学的广泛应用。在这次大会上，大型的计算机硬件和软件的展示和演示令人瞩目，并使与会者能探究这方面的最新技术。美国数学家 C. W. 吉尔(Gear)当选为第三届工业与应用数学国际会议委员会主席。

第四次工业与应用数学国际会议(ICIAM - 99)是 1999 年 7 月 5 日至 9 日在英国爱丁堡召开的，共有 1 700 多名代表出席了这次大会，参加这次大会的有 50 位是来自世界各地的华人工业与应用数学界的代表。本次会议的主席是英国著名数学家、菲尔兹奖得主 M. F. 阿蒂亚(Atiyah)。这次大会共有 33 个大会报告，会上共有分组报告一千多个，内容覆盖了工业与应用数学的各个领域。其中超导材料，纽结理论在动力系统和流体力学中的应用，组合问题，科学计算，非线性光学，医学中的数学问题等是热门，有许多报告。我国数学家、中国科学院袁亚湘教授也作了大会报告。

在大会的开幕式上还颁发了四个重要奖：ICIAM 拉格朗日奖（The ICIAM Lagrange Prize），此奖是由法国、意大利和西班牙工业与应用数学学会共同资助设立的，其宗旨是奖励对国际公认的一生为工业与应用数学做出贡献的数学家，本届的得主是法国的 J－L. 利翁（Lions）；ICIAM 柯拉兹奖（The ICIAM Collatz Prize），此奖是由德国工业与应用数学学会资助设立的，其宗旨是奖励国际公认的在工业与应用数学中做出杰出工作的 42 岁以下的年青数学家，本届的得主是德国的 S. 马勒（Muller）；ICIAM 麦克斯韦奖（The ICIAM Maxwell Prize），此奖是由英国应用数学学会和麦克斯韦基金会资助设立的，其宗旨是奖励国际公认的在应用数学方面做出的重大的原创性工作，本届得主是美国加州大学伯克利分校的 G. 巴伦布拉特（Baren blatt）；ICIAM 创新奖（The ICIAM Pioneer），此奖是由美国工业与应用数学学会资助设立的，其宗旨是奖励将应用数学和科学计算技术引入工业和科学新领域的先驱性工作，本届得主是美国耶鲁的 R. 科弗曼（Coifman）和瑞士的 H. 纽泽特（Neuzert）。

第五次工业与应用数学国际会议（ICIAM－03）是 2003 年 7 月 7 日至 11 日在澳大利亚悉尼召开的，共有约 2 000 名代表出席了这次大会，中国大陆及港、台共约有 40 名代表参加。这次大会共有 26 个大会报告，其中包括北京大学的应隆安教授（他演讲的主题是界面问题及其数学分析和数值计算）和来自美国加州理工学院的侯一钊教授（演讲的主题是不可压流体的多尺度模型和计算）。

在这次大会的开幕式上由工业与应用数学国际委员会主席、ICIAM 奖励委员会主席 O. 奈凡里纳（Navanlinna）颁奖，ICIAM 当选主席 I. 斯隆（Sloan）宣布评选结果。这次获得拉格朗日奖、柯拉斯奖、麦克斯韦奖、创新奖的分别是：意大利巴维亚大学的 E. 麦吉纳斯（Magenes）、美国普林斯顿大学的鄂维南（现任北京大学长江讲座教授）、美国拉脱格大学的 D. 克鲁斯卡尔（Kruskal）、美

国加利福尼亚州立大学洛杉矶分校的 S. 奥谢(Osher)。

在会后举行的 ICIAM 委员会上，由中国科学院院士、中国工业与应用数学会理事长李大潜教授代表中国工业与应用数学学会于 2001 年提出的设立 ICIAM 苏步青奖的建议经过讨论顺利通过。该奖的宗旨是：奖励在数学对经济腾飞和人类发展的应用方面做出杰出贡献的人。这是以我国数学家姓名命名的第一个国际性数学大奖。苏步青奖每四年在国际工业与应用数学大会上颁发一次，每次一人。

在这次 ICIAM 委员会上，李大潜院士当选为 ICIAM 委员会的 5 人领导成员之一。

第六次工业与应用数学国际会议将于 2007 年在瑞士苏黎世举行。

附录九　新千年七个悬赏的数学问题简介

克莱数学促进会(Clay Mathematics Institute)于 2000 年 5 月 24 日,在巴黎法兰西学院举行的一项特别活动中,公布了新千年七个悬赏的数学问题,每个问题的奖金都是 100 万美元,而且没有时间限制。

克莱数学促进会于 1998 年由波士顿实业家 L. T. 克莱(Clay)创立。该促进会是一个旨在增进并传播数学知识的私人的、非赢利的基金会。L. T. 克莱认为:"数学具体体现了人类知识的精华;数学的影响遍及人类活动的每一领域;数学思维的前沿在当今以极其深刻的方式逐步形成。数学知识的基本进展与所有科学领域的发现密切相关。数学的技术应用支持着我们的日常生活,包括我们的交流和传播能力,我们的健康和幸福,我们的安全以及我们全球的繁荣昌盛。当今数学的进展仍然是形成我们的未来世界的主要因素。为对数学真理的范围做出正确的评价将考验人类心智的能力。"

为了颂扬新千禧年的数学,克莱数学促进会科学顾问委员会选择了下列多年没有得到解决的七个经典问题悬赏征解。

P 与 NP 问题:一个问题称为是 P 的,如果它可以通过运行多项式次(即运行时间至多是输入量大小的多项式函数)的一种算法获得解决。一个问题称为是 NP 的,如果所提出的解答可以用多项式次算法来检验。P 等于 NP 吗?

黎曼猜想:黎曼 ζ 函数的每个非平凡零点有等于 1/2 的实部。

庞加莱猜想:任何单连通闭三维流形同胚于三维球。

霍奇猜想:任何霍奇类关于一个非奇异复射影代数簇都是某些代数闭链类的有理线性组合。

伯奇和斯温纳顿-德维尔猜想:对于建立在有理数域上的每一条椭圆曲线,它在1处的L函数变为零的阶等于该曲线上有理点的阿贝尔群的秩。

纳维-斯托克斯方程组:(在适当的边界及初始条件下)对三维纳维-斯托克斯方程组证明或反证其光滑解的存在性。

杨-米尔斯理论:证明量子杨-米尔斯场存在并存在一个质量间隙。

克莱数学促进会科学顾问委员会的成员、著名数学家A. 怀尔斯(Wiles)2000年5月24日在发布此千禧年悬赏问题的记者招待会上说:"我们相信,作为20世纪未解决的重大数学问题,第二个千年的悬赏问题令人瞩目。有些问题可以追溯到更早的时期,这些问题并不新,它们已为数学界所熟知。但我们希望,通过悬赏征求解答,使更多的听众深刻地认识这些问题,同时也把在做数学的艰辛中所获得的兴奋和刺激带给更多听众……我们坚信,这些悬赏问题的解决,将类似地打开我们不曾想像到的数学新世界。"

附录十　本书涉及的其他几个奖的简介

1. 博歇(Bŏcher)奖

此奖是纪念美国数学家 M. 博歇(Bŏcher, Maxime, 1867.8.28—1918.9.12)教授而设立的,创立于 1923 年。每五年颁发一次,表彰这五年中在分析方面出色的研究论文,但早期也有数学家因数论、代数、几何、拓扑的工作而获奖。受奖者必须是美国数学会会员。从 1971 年开始,这一条文被放宽了,规定只要文章发表在被认可的北美杂志上即可参评。它可以反映现代数学分析的发展主流。

2. 科尔(Cole)代数奖和数论奖

这两项奖是为表示对美国数学家、美国数学会的组织领导人之一 F. N. 科尔(Cole,Ftank Nelson, 1861.9.20—1926.5.26)教授的敬意,在他当了 25 年 Bulletin 主编以后,作为美国数学会书记退休时设立的,创立于 1928 年。最初的基金是科尔教授从他的退休金中捐赠的,并得到学会会员的赞助,后来他的儿子 C. A. 科尔(Cole,Charles A.)又使它翻了一番。每五年分别就代数和数论方面的贡献颁发一次,其条件与博歇(Bŏcher)奖类似。

3. 维纳(Wiener)应用数学奖

此奖是为了纪念美国数学家、控制论的创始人 N. 维纳(Wiener,Norbert,1894.11.26—1964.3.18)教授,以麻省理工学院数学系的一笔捐赠作为基金,美国数学会和美国工业及应用数学会联合设立的,创立于 1967 年。从 1967 年开始通常每五年颁奖一次,表彰“在最高和最广的意义下对应用数学做出的杰出贡献”。人选由美国数学会和美国工业及应用数学会共同确定。获奖者必须是这些学会的成员,并为美国、加拿大或墨西哥居民。

4. 斯蒂尔(Steele)奖

此奖是为了纪念美国数学家 G. D. 伯克霍夫(Birkhoff, George David, 1884. 3. 21—1944. 11. 12)、W. F. 奥斯古德(Osgood, William Fogg, 1864. 3. 10—1943. 7. 22)、W. C. 格劳斯坦(Graustein, William Caspur, 1888. 11. 15—1941. 1. 22),以哈佛学院 1923 级毕业生 L. P. 斯蒂尔(Steele, Leroy P.)的 145 000 美元遗赠作为基金,由美国数学会于 1970 年设立的。最初的宗旨是每年颁发一个或几个奖,授予那些有杰出的数学研究成果,特别是在较为广泛的数学领域中发表过优秀论文的数学家。1977 年在美国数学会会议上修改了颁奖条例,决定每年至多颁发三个奖在下述三方面(每个方面至多一个奖)授予优秀数学家:(1)终身成就奖,表彰获奖者的全部数学工作所产生的累计影响,一段时间中的高水平研究工作,发展某一领域的特殊影响,以及由其培养的博士研究生所反映出来对数学的影响;(2)数学著述奖,表彰书,或内容丰富的总结性文章,或评述性研究文章;(3)重大研究奖,表彰近期或较早期的文章,它被证明有奠基性,或在某领域中有持久的重要性,或者是重要研究的范例。斯蒂尔奖的获奖名单,由美国数学会一个专门的选拔委员会提出。该委员会成员不固定,委员会主席每年由不同人选担任。从 1979 年起在美国数学会每年的夏季会议上颁发当年的奖。

5. 巴纳德(Banrard)奖章

此奖是为了纪念美国数学家、美国科学发展协会的创立者之一、前哥伦比亚大学校长 F. A. P. 巴纳德(Barnard, Frederick Augustus Porter, 1809. 5—1889. 4. 2)教授而设立的。该奖章的获得者由美国国家科学院推荐,由哥伦比亚大学颁发。该奖章每五年颁发一次,"……颁发给那些在物理科学或自然科学中有所发现,或在有益于人类的新颖的科学应用中有所发明的人,而不管他是美国人,还是其他国家的人。这些发明或发现是由美国国家科学院评定的被认为是最应获得该项荣誉的发明或发现。"

6. 美国科学奖章

此奖是表彰在物理、生物、数学和工程科学方面做出杰出贡献的科学家。受奖人由美国科学委员会提名,美国总统选定。每年颁发一次,创立于 1959 年。

7. 巴尔参(Balzan)奖

此奖是 A. L. 巴尔参(Balzan, Angela Lina)为纪念他的父亲尤杰尼欧·巴尔参这位前意大利主要报纸《邮电晚报》的总编而设立的基金,始创于 1951 年。自 1961 年奖励了 A. N. 柯尔莫哥洛夫及 K. 冯·弗雷希(生物学家)及几位人文主义者和为"博爱、和平及民族间兄弟关系"而战斗的著名战士之后,该奖曾中断了 14 年,1978 年又重新颁发。

8. 罗巴切夫基斯(Lobatchevski)奖

此奖是俄国喀山数学物理学会于 1895 年为了纪念俄国大数学家、非欧几何的创始人之一、原喀山大学校长 H. И. 罗巴切夫斯基(Lobatchevski, Nicolai Ivanovitch, 1792. 12. 1—1856. 2. 24)诞辰 100 周年建立的国际数学奖,奖励对数学(特别是几何学)发展做出重大贡献的数学家。于 1897 年首次颁发。1950 年以后,这个奖由苏联科学院颁发。

9. 维布伦(Veblen)奖

此奖是为纪念美国著名数学家 O. 维布伦(Veblen, Oswald, 1880. 6. 24—1960. 8. 10)教授于 1961 年设立的。基金首先由他从前的学生和同事捐赠,后来 O. 维布伦的遗孀将基金翻了一番。头两届奖于 1964 年颁发,第三、四届奖于 1966 年颁发。之后,每五年颁发一次,授予几何或拓扑方面的研究工作,其条件与博歇(Bocher)奖类似。

10. 庞加莱(Poincaré)奖

此奖是法国科学院为纪念其杰出数学家 J. H. 庞加莱(Poincaré, Jules Henri, 1854. 4. 25—1912. 7. 17)而设立的,此奖授予杰出数学家,是一枚金质奖章,不定期的,有值得授予的人时

才颁发。

11. 伯克霍夫(Birkhoff)奖

此奖是美国数学会和美国工业及应用数学会为纪念美国数学家 G. D. 伯克霍夫(Birkoff, George David, 1884, 3. 21—1944. 11. 12)于 1968 年共同发起设立的。每五年颁奖一次,表彰在最高和最广的意义上对应用数学做出杰出贡献的数学家。受奖者必须是美国数学会或美国工业及应用数学会的成员,并是美国、加拿大或墨西哥的居民。

12. 贝维克(Berwick)奖

此奖是英国伦敦数学会为纪念英国数学家 W. E. H. 贝维克(Berwick, William Edward Hodgson, 1888. 3. 11—1944. 5. 13)设立的。此奖分初级与高级两个级别,分别奖励青年数学家与资深数学家的成就。

13. 布劳威尔(Brouwer)奖

此奖是为纪念荷兰数学家 L. E. J. 布劳威尔(Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 1881. 2. 27—1966. 12. 2)而设立的,奖励在 L. E. J. 布劳威尔原来感兴趣的数学领域有突出成果者,由荷兰数学会颁发。

14. 美国国家科学院数学奖(National Academy of Sciences Award in Mathematics)

在美国数学会成立 100 周年时,由美国数学会和美国工业与应用数学会共同发起设立的奖。每四年颁发一次,奖励过去十年内具有杰出数学研究成果者,首次颁发是 1988 年。

15. 费萨尔国际奖(The King Fasial International Prize)

沙特阿拉伯前国王的第八子为纪念其父费萨尔国王于 1976 年建立了费萨尔国王基金会,并于 1979 年设立此奖。世界各国的学术机构、组织都可以提出受奖候选人。费萨尔科学奖轮流颁发给数学、化学、生物学和物理学领域,每年一个学科,由费萨尔国王基金会颁发。

16. 奥斯特洛斯基(Ostrowski)奖

著名瑞士数学家 A.M. 奥斯特洛斯基(Ostrowski, A.M. 1893—1986)留下遗产建立了奥斯特洛斯基基金。1987 年设立此奖,每两年颁发一次,奖励一二位在纯粹数学或数值分析的基础理论方面近五年中有突出成就的数学家。由瑞士奥斯特洛斯基基金会颁发。首次颁发是 1989 年。

17. 冯·卡门(Von Karman)奖

此奖是美国工业与应用数学会为纪念美国科学家 T. 冯·卡门(Von Karman, Theodore, 1881.5.11—1963.5.6)于 20 世纪 60 年代创立的,表彰近五年(或十年)来出色地将数学应用于力学或工程科学的成果。如有合适的受奖者,每年颁发一次。

18. 福特(Ford)奖

此奖是美国数学会为纪念美国数学会前主席、《美国数学月刊》前主编 L. R. 福特(Ford, Lester R.)于 1964 年创立的,表彰杰出的介绍性作品。受奖者的文章须发表在重要的数学杂志上,一年颁奖最多不超过 6 份,在每年夏季会议上颁发。

19. 乔维恩特(Chauvenet)奖

此奖是美国数学会为纪念美国数学家乔维恩特于 1925 年设立的,表彰美国数学会成员认为重要的、杰出的介绍性及综合性文章。受奖的文章须用英文发表,在每年一月举行的会议上颁发。

20. 邵逸夫奖

此奖由中国香港著名企业家邵逸夫选生捐资设立,共三个奖项,分别为数学科学、天文学和生命科学与医学,每年颁发一次,每项奖金 100 万美元。此奖属国际性大奖,不论种族、国籍或宗教信仰,旨在表彰在学术与科学研究上取得重大突破的成果,对人类生活具有深远影响的科学家。在评奖程序方面借鉴了诺贝尔奖的提名方法,由基金会向世界范围发出上千份函件,邀请各界专家学者提名。提名报告由评审团商讨建议,再由邵逸夫奖基金会最后决定。

参考文献

1　Боголюбов Н Н ，Израиль Моисеевич Гельфанд. 倪明，袁家玮译. 数学译林，1988(3)：273～246

2　Ретах В С，Сосинский А Б. 访问 И. М. Гельфанд 院士. 李锟译. 数学译林，1990(4)：340～346

3　倪明，袁家玮编译. И. М. Гельфанд 简介. 数学译林，1988(3)：245～246

4　Gelfand I M. Collected Papers，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ. Heidelberg：Springer - Verlag，1987～1988

5　Гельфанд И М. 一次代数学. 刘亦珩译. 北京：商务印书馆，1953

6　Гельфанд И М，Шилов Т Е，Виленкин Н Я. 广义函数，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ. 林坚冰，夏道行译. 北京：科学出版社，1984～1985

7　Pitetsky-Sapiro I. 在苏联是怎样进行纯数学研究的. 李诵青译. 数学译林，1985(4)：322～828

8　Siegel C F. Gesammelte Abhandlungen，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ. Heidelberg：Springer - Verlag，1966～1979

9　Siegel C L. 关于 Frankfurt 数学讨论班的历史. 贺霖译. 数学译林，1990(1)：63～71

10　Siegel C L. 多复变数解析函数. 龚昇译. 北京：科学出版社，1960

11　Leary J. 教学与研究. 吴为译. 数学译林，1986(2)：144～155

12　Atiyah M. 鉴别数学进步之我见. 虞言林，杜正东译. 数学译林，1991(3)：234～242

13 Weil A. Oeuvres Scientifiques, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ. Heidelberg: Springer - Verlag,1980

14 Weil A. 数论今昔两讲. 王启明译. 数学译林,1984(1):72～78

15 Manin Yu I. Hibert 第 15 问题. 戴新生译. 数学译林,1980(1):58～60

16 Springer 出版社出版的数学家著作集(下). 袁向东译. 数学译林,1989(4):378

17 Cartan H. Oeuvres - Collected Works,Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ. Heidelberg: Springer - Verlag,1979

18 Cartan H. Nicolas Bourbaki 与现代数学. 贺霖译. 数学译林,1983(1):73～81

19 Cartan H. 解析函数初步. 余家荣译. 北京:高等教育出版社,1983

20 Богодюбов Н Н, Гнеденко Б В, Соболев С Л. Андреи Николаевич Колмогоров. 高培丰,栾长福,熊同生译. 数学译林,1985(4):312～321

21 伊藤清. Kolmogorov 的数学观与业绩. 潘焕旭译. 数学译林,1990(3):223～228,246

22 Kolmogorov A N. 概率论基本概念. 丁寿田译. 北京:商务印书馆,1952

23 Гнеденко Б В,Колмогоров А Н. 相互独立随机变数之和的极限分布. 王寿仁译. 北京:科学出版社,1955

24 Kolmogorov A N. Uber die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann, 1931 (104): 415～458

25 Ahlfors L V. 古典分析的现在和将来. 张玉林译. 数学译林,1987(3):225～229

26 Ossermann R. 几何学在美国的复兴:1938—1988. 张洪光

译.数学译林,1990(2):130～136

27 Ahlfors L V. 复分析.张立,张静译.上海:上海科学技术出版社,1984

28 Ahlfors L V. 拟共形映照,Teichnuller 空间和 Klein 群.陈怀惠译.数学译林,1980(2):1～11

29 Birkhoff G. 代数学的现代趋势.俞曙霞译.数学译林,1983(4):1～16

30 Zariski O. The fundamental ideas of abstract algebraic geometry. Prov. Internat. CongMath. Cambridge,1950. 77～89

31 Whitney H. 让研究工作行之自然.张锦豪译.数学译林,1987(2):157～167

32 Крейн М Г,Люстерник Л А. 泛函分析.关肇直译.北京:中国科学院出版社,1953

33 苏联五十年来数学发展的基本道路.杜瑞芝译.数学译林,1986(3):224～233

34 Chern S S. Selected Papers, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ. Heidelberg: Springer - Verlag,1978～1979

35 Well A. 我的朋友——几何学家陈省身.杨振宁节译.自然杂志,1979(8):479～480

36 李心灿.名师与高徒——陈省身与丘成桐.自然杂志,1989(6):436～448

37 汤华.中国数学界青年学子的"总教练"——访陈省身教授.《瞭望》周刊,1984(51):10～11

38 陈省身.怎样把中国建为数学大国.数学进展,1991,20(2):129～134

39 陈省身.我的科学生涯与著作梗概.冯长彬,熊春先译.数学译林,1988(2):131～138

40 Chern S S. 什么是几何学.范先信译.数学译林,1991(3):196～201

41 陈省身.对中国数学的展望．自然杂志,1981(4):10

42 Dembart L. 在数的天地里,他首屈一指——记数学家Erdös.刘峰译.数学译林,1983(4):73～75

43 Hoffman P. 一心迷恋于数的学者——Paul Erdös必定是世界上最多产的,然而或许又是最怪僻的数学家.朱见平译.数学译林,1990(1):45～59

44 Notices of the American Mathematical Society, 1985, 32: 188

45 浪川幸彦.代数几何.陈治中译.数学译林,1990(3):215～220

46 小平邦彦.数学杂谈——数学之难以想象.陈治中译.数学译林,1989(3):273～277

47 饭高茂.数学究竟是什么?——采访小平邦彦教授.张亮夫译.数学译林,1986(1):60～72

48 Wells R O. Cauchy－Riemann方程和微分几何.胡作玄译.数学译林,1984(1):11～20

49 Lewy H. An example of a smooth linear Pertial differential equation without solution. Ann. of Math. ,1957(66):155～158

50 Notices of the American Mathematical Society, 1986, 33: 311

51 小平邦彦. 数学的印象.陈治中译.数学译林,1991(2):129～132

52 Whitehead G W. 半个世纪的同伦论.沈信耀译.数学译林,1985(3):177～184

53 Eilenberg S. 代数拓扑学.沈信耀译.数学译林,1980(1):26～35

54 Selberg A. Ramanujan百周年诞辰之际的反思.冯绪宁译.数学译林,1990(2):154～158

55 Notices of the American Mathematical Society, 1987, 34: 268

56 Itô Kiyosi. 我的科学生涯. 成世学译. 数学译林, 1990(3): 229～232

57 伊藤清. 随机分析学的兴起. 安万福, 马志明译. 数学译林, 1984(2): 126～140

58 Itô Kiyosi. Selected Papers. Heidelberg: Springer-Verlag, 1978

59 伊藤清. 确率论. 东京: 岩波书店, 1958(中译本: 概率论. 刘璋温译. 北京: 科学出版社, 1963)

60 伊藤清. 岩波数学辞典第 3 版序. 东京: 岩波书店, 1985

61 Lax P D. 数学及其应用. 邵明湖译. 数学译林, 1988(1): 60～65

62 Lax P D, Burstein S, Lax A. 微积分及其应用与计算. 唐述钊等译. 北京: 人民教育出版社, 1980

63 Claesson T, Hörmander L. 积分论. 黄明游译. 北京: 科学出版社, 1987

64 Lax P D. 应用数学三十年. 汪非译. 自然杂志, 1979(1): 16～17

65 Notices of the Mathematical Society, 1988, 35: 545

66 Garding L. Hörmander 在线性微分算子方面的工作. 余伟权译. 数学译林, 1988(3): 187～189

67 Hörmander L. 一般偏微分算子理论. 覃国光, 邹继高译. 上海: 上海科学技术出版社, 1964

68 Hörmander L. 线性偏微分算子. 陈庆益译. 北京: 科学出版社, 1980

69 Hirzebruch F. Gesammelte Abhandlungen. Heidelberg: Springer-Verlag, 1987

70 Notices of the American Mathematical Society, 1989, 36: 267

71 波恩——数学中心. 吴是静译. 数学译林,1983(4):85～87
72 Hirzebruch F. 代数曲面. 王启明,胥鸣伟整理. 数学译林,1983(3):253～254
73 Springer 出版社出版的数学家著作集(上). 李文林译. 数学译林,1989(3):253～254
74 Milnor J. 双曲几何学一百五十年. 胡作玄译. 数学译林,1984(1):21～32
75 Milnor J. 从微分观点看拓扑. 熊金城译. 上海:上海科学技术出版社,1983
76 Calderon P. 奇异积分算子及其在双曲微分方程上的应用. 伍卓群译. 上海:上海科学技术出版社,1964
77 Semmes S. 非线性 Fourier 分析. 林鹏译. 数学译林,1990(2):85～99
78 Cartan H. 代数结构与拓扑结构. 刘应明,胡师度译. 上海:上海科学技术出版社,1988
79 伊藤清. 随机过程. 刘璋温译. 上海:上海科学技术出版社,1961
80 中国大百科全书(数学卷). 北京:中国大百科全书出版社,1988
81 日本数学会编. 数学百科辞典. 北京:科学出版社,1984
82 梁宗巨主编. 数学家传略辞典. 济南:山东教育出版社,1989
83 张奠宙,赵斌编著. 二十世纪数学史话. 上海:知识出版社,1989
84 胡作玄编著. 布尔巴基学派的兴衰. 上海:知识出版社,1984
85 胡作玄,赵斌编写. 菲尔兹奖获得者传. 长沙:湖南科学技术出版社,1984
86 Modern Scientists and Engineers. McGraw - Hill,1980(1):201～202;1980(3):309～310,369～365
87 Lax P L. 应用数学在美国的蓬勃发展. 谭得春译. 数学译

林,1992(1):56～61

88 Constance Reid. Hans Lewy. s. l. ,1990

89 Notices of the American Mathematical Society,1986,33:753

90 Notices of the American Mathematical Society,1990,37:1209～1214

91 Kaper J N. 数学家谈数学本质. 王庆人译. 北京:北京大学出版社,1989

92 Calderod A P. Integrales Singularesy Sus Aplicaciones A Ecuaciones Difenoiales Hiperbolicas. Universidad de Buenos Aires,1960

93 神保道夫. 菲尔兹奖获得者 Vladimir Drinfeld 访问记. 陈治中译. 数学译林,1992(4):4～307

94 陈省身. 数学百科全书中文版序. 北京:科学出版社,1993

95 非线性发展偏微分方程国际会议召开. 中国数学会通讯,1993(3):12～13

96 Rose N J. Richard Courant 诞辰百周年纪念. 吴卓人,郭镜明译. 数学译林,1989(3):265～268

97 陈省身. 陈省身文选. 北京:科学出版社,1991. 177

98 Albers D J, Alexanderson G L, Reid C. 国际数学家大会 1893—1986. 袁向东译. 数学译林,1991(1):68～75;1991(2):133～142;1991(3):225～233

99 1986 年国际数学家大会 1 小时报告(摘要). 何育赞等译. 数学译林,1987(2):39～111

100 1990 年国际数学家大会 1 小时报告(摘要). 王国芳等译. 数学译林,1991(1):1～15;1991(2):93～100

101 叶其孝,应隆安. 工业与应用数学国际会议(ICIAM)简介. 高校应用数学学报,1990(3):445～446

102 叶其孝. 第二届工业与应用数学国际会议(ICIAM—91)在美国华盛顿召开. 中国数学会通讯,1991(3):18～20

103 Notices of the American Mathematical Society, 1993, 40: 335

104 Gromov M. 软和硬辛几何. 马力, 陈军译. 数学译林, 1989(2): 101～114

105 Dieudonné J, Tits J. Claude Chevallay(1909—1984). 胡作玄译. 数学译林, 1988(4): 324～327

106 Carleson L. Charles Fefferman 的工作. 余伟权译. 数学译林, 1989(2): 145～147

107 Aschbacher M. 有限单群的分类. 王建磐译. 数学译林, 1982(3): 215～225

108 Notices of the American Mathematical Society, 1992, 39: 321～322

109 Farb B. 自动群导读. 潘建中译. 数学译林, 1994(3): 207～221

110 Gromov M. 细胞分裂与双曲几何. 陈军译. 数学译林, 1991(2): 120～124

111 Hurleg F J, Rudvalis A. 有限单群. 李根道译. 数学译林, 1980(2): 23～34

112 Moser J. 太阳系是稳定的吗? 陈军译. 数学译林, 1990(1): 34～41

113 Dreifus R. 在国际数学家大会(ICM'94)开幕式上的讲话. 张恭庆译. 数学译林, 1995(1): 56～59

114 Notices of the American Mathematical Society, 1995, 42: 255

115 Notices of the American Mathematical Society, 1996, 43: 221～222

116 Langlands 会议——贺 Robert Langlands 60 岁诞辰. 卞伟译. 数学译林, 1997(1): 40～41

117 Anthony W K. 群表示和调和分析——从 Euler 到 Lang-

lands. 那吉生,冯绪宁译. 数学译林,1997(2):102～103

118 李心灿. 数学界的莫扎特:爱尔特希. 科学,1997,50(2):46～49

119 Kolata G. 安德鲁·怀尔斯放出数学卫星:350 年的古老问题已被攻克. 纽约时报,1993.6.29

120 Kolata G. 数学的古老神秘终于解决. 纽约时报,1993.6.24

121 A. Wiles 宣布证明了费马猜想. 中国数学会通讯,1993(3):3～4

122 Norikov S. 可积模型在数学发展中的作用. 邹建成译. 数学译林,1994(4):265～278

123 Sinai. 双曲台球戏. 虞言林译. 数学译林,1991(2):98

124 Notices of the American Mathematical Society,1997,44:344,351～352

125 胡作玄编译. 历届 Wolf 奖得主简介. 数学译林,1997(2):163～173;1997(3):261～264;1997(4):339～346

126 Notices of the American Mathematical Society,1988,35:1015

127 Notices of the American Mathematical Society,1997,44:1097～1099

128 1998 年国际数学家大会在柏林举行. 中国数学会通讯,1998(2):2～4

129 Mumford D B. 数学的趋势——选择我们各自的方向. 中国数学会通讯,1998(4):14

130 Notices of the American Mathematical Society,1998,45:234

131 Notices of the American Mathematical Society,1999,46:420

132 Notices of the American Mathematical Society,1994,41:1103～1109

133 S. G. Krantz. L. V. Ahlfors (1907—1996). 李叶舟译. 数学译林,1998(4). 313—321

134 饭高茂. 流形之严父,陈治中译. 数学译林,1999(4):315～323

135 广中平祐. 又一位高尚的人离世而去,陈治中泽. 数学译林,1998(3):208～210

136 John Milnor. 在老范氏楼中成长. 胥鸣鸣译. 数学译林,2001(1):59～66

137 John G. Thompson. Group Theory. 1 ～ 12, Academic Press Lonon—New York, 1984

138 C. T. Chong, Y. K. Leong. Jean—Pierre Serre 访问记. 张伟平,陈军译. 数学译林. 1987(3):254～259

139 Bott, Raoul. 拓扑对分析的影响. 胡文传. 王礼静译. 数学译林 1997(3):192—204

140 Hyman Bass, Henri Cartan,.... Samuel Eilenberg (1913—1988). Notices of The AMS. Vol. 45, No. 10. 1998

141 Mikhael Gromov. 未来几十年数学可能的发展趋势. 林长好译. 数学译林,1999(3):244～245

142 Smilka Zdravkoska. Vladimir Igorevich Arnol'd 访问记,陈军译. 数学译林,1988(1):47～52

143 V. I. Arnold. 数学能否继续生存?——关于苏黎世大会的报告. 王天明、吴为译. 数学译林,1996(2):154～160

144 Владимир Арнольд. 为什么我们要学习数学——关于这一点数学家是怎么想的,姚芳译. 数学译林,2002(1):79～88

145 Allyn Jackson. Raoul Bott 访问记,邹建成译. 数学译林,2001(3):220～228,235

146 张奠宙. 20 世纪数学经纬. 上海:华东师范大学出版社,2002

147 László Lovász. 数学是一个整体. 周仲良译. 上海市数学学

会通知,1998(2):1～5

148 L. Lovász. 线性规划的一个新算法. 刘振宏译,数学译林,1983(1):39～46

149 E. M. Stein. 调和分析中与振荡积分和曲率有关问题. 虞言林译,数学译林,1987(2):104～105

150 http://shelah. logic. at/

151 弥永昌吉. 战后日本数学的发展. 陈治中译. 数学译林,1998(2):149～156

152 佐藤幹夫. 私の数学. 数学のたのしみ. No. 13, 1999

153 J. Tate. 第九问题:一般互反律. 冯绪宁译. 数学译林,1985(3):191～197

154 D. Mumford, J. Tate. Pierre Deligne. 戴新生译. 数学译林,1980(1):62～65

155 Notices of the American Mathematical Society, 2001, 48: 503～504

156 Notices of the American Mathematical Society, 2003, 50: 569～570

157 Allyn Jackson. Raoul Bott 访问记. 邹建成,铁小匀,赵慧译. 数学译林,2001(3):220～228

158 V. I. Arol'd. 回忆 A. N. Kolmogorov. 胡晓予译. 数学译林,2000(2):141

159 Robert A. Fetterman. 数学家和奇异积分大师 Alberto P. Caldorón(1920—98). 王忠玉译. 数学译林,2000(1):42

160 J. P. Serre. André Weil 的生平和工作. 冯克勤译. 数学译林,2000(1):57～62

161 Michacl Monastyrsky Modern Mathematics in the light of the Fields Medals. Wellesley, Massachusette. A. K. Peters, Ltd, 1996

162 http://www-history. mcs. st-andrews. ac. uk/history/Math-

ematicians/Connes.
163 Sergei Novikov. 可积模型在数学发展中的作用. 邹建成译. 数学译林,2001(1):1～4
164 Albers D J, Alexanderson G, Reid C. 国际数学家大会,袁向东,弥静译. 数学译林,1991(3):231
165 冯克勤. 1994 年国际数学家大会概况. 中国数学会通讯,1994(3):2
166 Lászlo Lovász. 几何算法和算法几何. 章祥荪译. 数学译林,1991(2):95～96
167 Raoul Bott. 拓扑漫谈. 熊剑飞译. 数学译林,1990(4):326～334
168 R. Bott. 论诱导表示. 江嘉禾译. 数学译林,1991(1):16～26
169 С. Л. Новиков 等. 赛奈的科学成就. 倪明译. 数学译林,1998(1):63～67
170 L. Lovász. 离散与连续:一物之两面? 李乔译. 数学译林,2004(4):333～344
171 Allyn Jackson. 祝百岁寿翁 Henri Cartan 快乐! 李乔译. 数学译林,2004(4):356
172 http://www. icm2002. org. cn/general/prize/nevanlinna/winners/htm
173 Jackson A. Crafoord 奖简介. 王忠玉译,数学译林,1998(3):257
174 华裔数学家丘成桐荣获国际大奖——克拉福德奖. 中国数学会通讯,1994(1):4
175 叶其孝. Alain Connes 荣获 Crafoord 数学奖. 中国数学会通讯,2001(3):14
176 叶其孝译. 著名数学家介绍七个新千年数学问题. 数学译林,2001(1):1

177 Jackson A. 设立百万美元数学大奖发布会. 林长好译. 数学译林,2001(1):55

178 Feder T. Math Solution to Nobel Problem. *Physics Today*, 2001,54(9)

179 赵驰. 陈省身获首届邵逸夫数学奖. 高等数学研究,2004(4):64

180 李心灿. 国际数学大奖简介. 科学,2002,54(5):52～54

181 李心灿. 高隆昌. 邹建成. 郑权. 当代数学精英. 上海:上海科技教育出版社, 2002

[General Information]
书名=当代数学大师　活尔夫数学奖得主及其建树与见解
作者=李心灿编著
页数=332
SS号=11704950
DX号=
出版日期=2005年10月
出版社=北京航空航天大学出版社